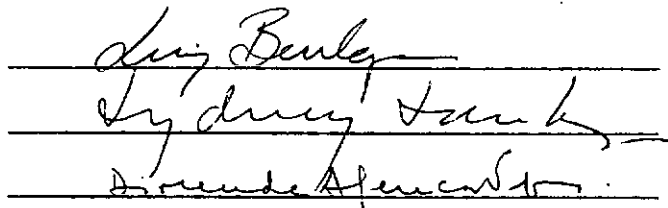


VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS
RETANGULARES SUBMETIDAS A
CARGAS NÃO UNIFORMES AO
LONGO DE SUA SUPERFÍCIE
MÉDIA

PAULO ALCANTARA GOMES

Tese submetida ao Corpo Docente da Coordenação dos Programas Pós-Graduados de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

Aprovada por


The first signature is 'Luiz Benício'.
The second signature is 'Lydyney Sampaio'.
The third signature is 'Dionísio Afonso'.

Agosto de 1968

A meus pais, por tudo.

A G R A D E C E M O S

Ao Professor LUIZ BEVILACQUA, nos
so orientador de tese, em cuja amizade
de e cultura alicerçamos nosso trabalho.

Ao Professor SYDNEY SANTOS, mes-
tre de todos os instantes, e a quem
devemos nosso ingresso no magistê—
rio superior.

Ao Professor ALBERTO COIMBRA, co
ordenador dos Programas Pós-Gradua-
dos de Engenharia, que, com abnega-
ção e sacrifício, vem ajudando a re
novar a universidade brasileira.

à COPPE, pela acolhida que nos
deu e pela formação que nos propi-
ciou.

A JOSÉ DA CUNHA MACEDO, pela de-
dicação e amizade, indispensáveis à
confecção gráfica dêste trabalho.

S U M Á R I O

No presente trabalho foram estudadas as vibrações livres de placas retangulares sujei—tas a cargas de compressão ao longo de sua superfície média, bem como determinadas as car—gas de instabilidade referentes aos diversos tipos de carregamento analisados.

Foi utilizado o método variacional de Ritz, para a análise de carregamentos distribuídos, não uniformemente, cuja forma é dada por um polinômio do segundo ou do primeiro grau, e feitas as particularizações para os casos de carregamentos parabólicos com simetria e car—regamentos hidrostáticos. Em ambos os casos foram determinadas as expressões que fornecem as frequências naturais de vibração e as cargas de instabilidade.

A título de aplicação numérica, foram cons—truídos gráficos e tabelas, por intermédio do computador IBM 1130, que permitem relacionar a frequência às dimensões da placa e à ordenada máxima de carga.

Í N D I C E

Capítulo I	- Equação diferencial de vibrações livres de placas retangulares sujeitas a cargas ao longo de sua superfície média	1
Capítulo II	- Vibrações livres de placas uniformemente comprimidas	12
Capítulo III	- Vibrações livres de placas submetidas a carregamentos distribuídos de modo não uniforme ao longo de sua superfície média . .	21
Conclusões	28
Nomenclatura	30
Bibliografia	31

C A P Í T U L O I

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE VIBRAÇÕES LIVRES
DE PLACAS RETANGULARES SUJEITAS A CARGAS
AO LONGO DE SUA SUPERFÍCIE MÉDIA

1 - Instituição da expressão da energia de deformação

Seja um corpo elástico submetido a um sistema de forças externas. Um segmento elementar de comprimento ds sofre uma deformação cujas componentes cartesianas são dadas por:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (I-1)$$

A nova distância ds_1 será dada em coordenadas cartesianas por:

$$ds_1 = \sqrt{(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2} \quad (I-2)$$

Levando em (I-2) as expressões (I-1) obteremos

$$\begin{aligned} ds_1 = & \sqrt{(1 + 2\epsilon_x)dx^2 + (1 + 2\epsilon_y)dy^2 + (1 + 2\epsilon_z)dz^2 +} \\ & + 2\gamma_{xy}dxdy + 2\gamma_{xz}dxdz + 2\gamma_{yz}dydz, \end{aligned} \quad (I-3)$$

onde os termos ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} definem as componentes do tensor de deformações (1)* e podem ser escritos na forma de

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (I-4A)$$

*- Os números entre parênteses, no decorrer do texto, indicam as referências bibliográficas que se encontram no fim do trabalho.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \gamma_{yz} &\equiv \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right]\end{aligned}\quad (I-4B)$$

Normalmente, em teoria das placas, nas expressões escritas são desprezados os termos envolvidos pelos colchêtes. No caso que vamos estudar, entretanto, a presença de cargas ao longo da superfície média torna, devido ao efeito de membrana, apreciável a ordem de grandeza de alguns destes termos.

A teoria estabelecida por von Kármán (2) permite desprezar os termos quadráticos em $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, pois, nas igualdades acima, ao mesmo tempo em que eles surgem no 2º grau, também surgem no 1º grau. Como estamos considerando que as deformações são pequenas, os termos do 2º grau podem ser desprezados em presença dos termos do 1º.

A mesma consideração pode ser feita no caso de (I-4B), pois os produtos $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$, etc, são da mesma ordem de grandeza que os termos quadráticos e, como aí, também surgem termos do primeiro grau, os primeiros podem deixar de ser considerados.

Outra hipótese que adotaremos como válida na instituição da equação diferencial de vibrações e que é também utilizada no estudo de flexão de placas é a de Kirchhoff, que admite que as retas normais ao plano médio da placa permaneçam como normais à superfície deformada. Analiticamente, esta afirmativa geométrica equivale a fazer

$$\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Uma vez efetuadas as simplificações estabelecidas acima, as expressões (I-4) se transformam em:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2\end{aligned}\quad (I-5A)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (I-5B)$$

A energia de deformação da placa nas condições em estudo pode ser deduzida, sem maiores dificuldades, por decomposição em duas parcelas.

A primeira destas parcelas, que denominaremos de energia de deformação na compressão (3), tem por expressão a integral

$$E_c = \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (I-6)$$

onde o domínio de integração V representa o volume da placa.

Fazendo $\sigma_x = N_x/h$, $\sigma_y = N_y/h$, $\tau_{xy} = N_{xy}/h$ sendo N_x , N_y e N_{xy} os esforços externos normais e tangenciais à superfície média, respectivamente, e h a espessura da placa (que consideraremos como uniforme e pequena em relação às demais dimensões). Integrando (I-6) desde $-h/2$ até $+h/2$ obtemos, após a substituição de σ_x , σ_y , τ_{xy} por seus valores escritos em função de N_x , N_y e N_{xy} :

$$E_c = \int_S (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dS \quad (I-7)$$

sendo o domínio de integração S estendido a toda superfície média da placa.

Substituindo em (I-7) as expressões (I-5) vamos chegar a

$$E_c = \int_S \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{-2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{-2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dS \quad (I-8)$$

que é a expressão da energia de deformação na compressão.

A parcela seguinte, que denominamos de energia de deformação transversal ou de flexão, pode também ser calculada facilmente, desde que apliquemos as expressões bem conhecidas da lei de Hooke

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (I-9A)$$

ou suas correspondentes

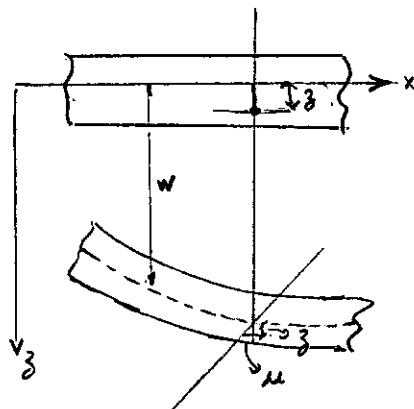
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (I-9B)$$

bem como as expressões que dão as deformações em teoria das placas (1)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (I-9C)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



Com tais fórmulas, a integral que dá a energia de deformação na flexão pode ser transformada. Com efeito, se

$$E_T = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV \quad (I-10)$$

define a energia de deformação na flexão, a aplicação das expressões (I-9) transforma (I-10) em

$$E_T = \frac{E}{1-\nu^2} \int_V \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} z^2 dV \quad (I-10A)$$

Se agora integrarmos entre $-h/2$ e $+h/2$ obteremos

$$E_T = D \int_S \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (I-11)$$

onde D é a grandeza denominada de rigidez da placa, e tem por expressão

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (I-11A)$$

A energia total de deformação da placa, que usaremos na dedução da equação diferencial de vibrações, será dada pela soma de E_c com E_T , ou melhor:

$$\begin{aligned} E = & \int_S \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & + N_{xy} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \left. \right\} dS + \frac{D}{2} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ & - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \left. \right\} dS \end{aligned} \quad (I-12)$$

2 - Primeira variação de uma integral tripla

Procuraremos agora uma equação do tipo da equação de Euler-Lagrange, do cálculo das variações, e que forneça a primeira variação de uma integral tripla.

A grande vantagem da dedução de uma equação deste tipo está na possibilidade de aplicação direta de uma fórmula sem necessidade de uma dedução específica a cada problema que envolva uma expressão da classe citada acima.

Assim, o que vamos procurar é uma equação em derivadas parciais que forneça a primeira variação da integral (2)

$$L = \iiint_R H(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z, w_{xx}, w_{yy}, w_{zz}, w_{xy}, w_{xz}, w_{yz}) dx dy dz, \quad (I-13)$$

onde $w(x, y, z)$ é uma função a ser determinada de modo tal que extremize a integral (I-13).

A função w deve satisfazer a uma condição de contorno força da do tipo linear (3), isto é,

$$f_1 w + f_2 w_n = f_3. \quad (I-14)$$

f_1, f_2 e f_3 são funções arbitrárias e w_n é a derivada segundo a normal à superfície que contorna a região R . Além disso, w é uma função tal que possui derivadas contínuas até a quarta ordem, pelo menos.

Admitamos agora que a função w recebe um acréscimo definido pelo produto $\kappa \theta(x, y, z)$ sendo κ uma constante arbitrariamente pequena e θ uma função definida de modo tal que (4)

$$w + \kappa \theta \quad \text{também satisfaça a condição de contorno} \quad (I-14).$$

Aplicando o teorema de Taylor podemos calcular a variação δL :

$$\delta L = \iiint_R (H_w + \theta_x H_{w_x} + \theta_y H_{w_y} + \theta_z H_{w_z} + \theta_{xx} H_{w_{xx}} + \theta_{yy} H_{w_{yy}} + \theta_{zz} H_{w_{zz}} + \theta_{yz} H_{w_{yz}} + \theta_{zx} H_{w_{zx}} + \theta_{yx} H_{w_{xy}}) dx dy dz = 0 \quad (I-15)$$

Os índices representados na expressão (I-15) caracterizam derivadas parciais em relação a variável que aparece no índice.

Agora podemos procurar efetuar uma integração por partes na expressão (I-15) com o auxílio do teorema da divergência uma vez que este seja escrito na forma (5)

$$\iiint_R (L dydz + M dx dz + N dx dy) = \iiint_R \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (I-16)$$

sendo β a superfície de contorno de R .

Admitamos inicialmente que, sendo u e v funções de x , y , e z , $L = uv$, $M = N = 0$. Esta hipótese nos leva a:

$$\iiint_R u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz = \iiint_R uv dy dz - \iiint_R \frac{\partial u}{\partial x} v dx dy dz \quad (I-17A)$$

O mesmo raciocínio pode ser conduzido para o caso em que

$$L = N = 0, M = uv:$$

$$\iiint_R u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz = \iiint_R uv dx dz - \iiint_R \frac{\partial u}{\partial y} v dx dy dz \quad (I-17B)$$

Analogamente, se $L = M = 0$ e $N = uv$, teremos:

$$\iiint_R u \frac{\partial v}{\partial z} dx dy dz = \iiint_R uv dx dy - \iiint_R \frac{\partial u}{\partial z} v dx dy dz \quad (I-17C)$$

Aplicando as fórmulas (I-17) a cada um dos termos de (I-15) obteremos

$$\begin{aligned} \iiint_R \theta_x \frac{\partial H}{\partial w_x} dx dy dz &= \iint_\beta \theta \frac{\partial H}{\partial w_x} dy dz - \iiint_R \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_x} dx dy dz \\ \iiint_R \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_y} dx dy dz &= \iint_\beta \theta \frac{\partial H}{\partial w_y} dx dz - \iiint_R \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_y} dx dy dz \\ \iiint_R \theta_z \frac{\partial H}{\partial w_z} dx dy dz &= \iint_\beta \theta \frac{\partial H}{\partial w_z} dx dy - \iiint_R \theta \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w_z} dx dy dz \\ \iiint_R \theta_{xx} \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} dx dy dz &= \iint_\beta \theta_x \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} dy dz - \iint_\beta \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} dy dz + \\ &+ \iiint_R \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} dx dy dz \\ \iiint_R \theta_{yy} \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} dx dy dz &= \iint_\beta \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} dx dz - \iint_\beta \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} dx dz + \\ &+ \iiint_R \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} \theta_{zz} \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} dx dy dz &= \iint_{\mathcal{B}} \theta_z \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} dx dy - \iint_{\mathcal{B}} \theta \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} dy dx + \\
+ \iiint_{\mathcal{R}} \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} dx dy dz \\
\iiint_{\mathcal{R}} \theta_{xy} \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} dx dy dz &= \iint_{\mathcal{B}} \theta_x \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} dx dz - \iint_{\mathcal{B}} \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} dy dz + \\
+ \iiint_{\mathcal{R}} \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} dx dy dz \\
\iiint_{\mathcal{R}} \theta_{xz} \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} dx dy dz &= \iint_{\mathcal{B}} \theta_x \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} dx dy - \iint_{\mathcal{B}} \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} dy dz + \\
+ \iiint_{\mathcal{R}} \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} dx dy dz \\
\iiint_{\mathcal{R}} \theta_{yz} \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} dx dy dz &= \iint_{\mathcal{B}} \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} dx dy - \iint_{\mathcal{B}} \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} dx dz + \\
+ \iiint_{\mathcal{R}} \theta \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} dx dy dz.
\end{aligned}$$

Denominaremos o conjunto de expressões acima de (I-18).

Tomando agora o conjunto de equações (I-18) e, levando na expressão (I-15), agrupando os termos sob o sinal de integral tripla e igualando a zero a nova forma da expressão (I-15), obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta L = \iiint_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial w_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial w_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xx}} \right) + \right. \\
+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{zz}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xz}} \right) + \\
+ \left. \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{yz}} \right) \right] \theta dx dy dz + \iint_{\mathcal{B}} \left[\frac{\partial H}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xx}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xy}} \right) - \right. \\
- \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xz}} \right) \right] \theta dy dz + \iint_{\mathcal{B}} \left[\frac{\partial H}{\partial w_y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{yy}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{yz}} \right) \right] \theta dx dz + \\
+ \iint_{\mathcal{B}} \left[\frac{\partial H}{\partial w_z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{zz}} \right) \right] \theta dx dy + \iint_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xy}} \right) \theta_x dx dz + \\
+ \iint_{\mathcal{B}} \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} \theta_x dy dx + \iint_{\mathcal{B}} \theta_z \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} dx dy + \iint_{\mathcal{B}} \theta_x \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} dy dz +
\end{aligned}$$

$$+ \iint_{\beta} \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} dx dz + \iint_{\beta} \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} dx dy = 0 \quad (I-19)$$

Em alguns casos de condições de contorno forçadas, a nulidade da equação (I-19) é acarretada pelo fato de ser o integrando da integral tripla nulo e, por ser θ considerada como nula em toda a superfície de contorno - β - da região R; consequentemente, tanto θ_y como θ_x são nulas ao longo de β . Estas últimas afirmativas garantem que todas as integrais duplas que aparecem em (I-19) são nulas.

Em outros casos, entretanto, quando as condições de contorno forçadas não permitem dizer que as integrais duplas se anulam por θ ser nulo ao longo de β , são estabelecidas as chamadas condições naturais de contorno que correspondem as equações obtidas quando são anulados os integrandos das integrais duplas.

Resumindo, podemos dizer que a condição necessária para que δL seja nula é que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w_z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{zy}} = 0 \end{aligned} \quad (I-20).$$

A condições naturais de contorno correspondentes a equação (I-20) serão:

$$\begin{aligned} \theta \left[\frac{\partial H}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{xx}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{xy}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} \right] &= 0 \\ \theta \left[\frac{\partial H}{\partial w_y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial w_{yz}} \right] &= 0 \\ \theta \left[\frac{\partial H}{\partial w_z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (I-21)$$

$$\theta_x \frac{\partial H}{\partial w_{xz}} = 0; \quad \theta_y \frac{\partial H}{\partial w_{yy}} = 0; \quad \theta_{x \partial w_{xy}} = 0; \quad \theta_{y \partial w_{yz}} = 0; \quad \theta_z \frac{\partial H}{\partial w_{zz}} = 0.$$

No estudo das vibrações de placas, as condições de contorno forçadas usuais, nos garantem que θ é nula ao longo de β . Assim, podemos garantir que as equações (I-21) serão satisfeitas.

3 - Dedução da equação diferencial de vibrações livres de uma placa submetida a cargas ao longo de sua superfície média

A equação diferencial em questão será instituída a partir do princípio de Hamilton para os sistemas contínuos. Para tanto, devemos escrever uma expressão para a ação, em termos das grandezas que definem os esforços e as deformações nas placas.

A expressão matemática da ação é dada por:

$$A = \int_{t_0}^t (E - T) dt; \quad (I-22)$$

para as placas E representa a energia potencial de deformação - dada pela equação (I-12) e T a energia cinética, que pode ser escrita na forma:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint (\dot{w})^2 dx dy, \quad (I-23)$$

sendo ρ a massa específica do material que constitui a placa e \dot{w} a derivada da deformação transversal da placa em relação ao tempo.

Entrando com as expressões (I-12) e (I-23) em (I-22), obtemos:

$$\begin{aligned} A = & \int_{t_0}^t \iint_S \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \\ & \left. - D (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{\rho h}{2} \dot{w}^2 \right\} dS dt. \end{aligned} \quad (I-24)$$

O princípio de Hamilton estabelece que a primeira variação da ação deve ser nula

$$\delta A = 0; \quad (I-25)$$

em outras palavras, a expressão acima significa que a primeira variação da expressão (I-24) deve ser nula e, como (I-24) é escrita sob a forma de uma integral tripla, podemos aplicar a ela a equação (I-20).

Aplicando a expressão (I-20) à nossa equação (I-24) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \ddot{w}_{ph} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{I-26}$$

Observemos agora que as equações de equilíbrio, segundo os eixos que estão contidos pelo plano médio da placa, (x, y) , são

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{I-26A}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

Resolvendo as derivadas indicadas em (I-26), agrupando os termos e levando em conta a expressão (I-26A), chegamos, após as simplificações algébricas, a:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \ddot{w}_{ph} = 0 \tag{I-27}$$

ou ainda, fazendo

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \nabla^4 w$$

obtemos a equação diferencial de vibrações livres das placas submetidas a carregamentos ao longo de sua superfície média:

$$D \nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \ddot{w}_{ph} = 0 \tag{I-27A}$$

Diversos casos particulares podem ser derivados da equação (I-27A), dependendo da natureza do carregamento ao longo da superfície média.

Assim, se o carregamento distribuído ao longo das arestas paralelas à direção definida pelo eixo y é compressivo e, se não

há outra espécie de carregamento ao longo das demais arestas, a equação (I-27A) se transforma em

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \ddot{w}_{ph} = 0 \quad (I-28)$$

No caso particular de serem as quatro arestas comprimidas e de não haver esforços tangenciais ao longo das mesmas, a equação (I-27A) toma a forma

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \ddot{w}_{ph} = 0 \quad (I-29)$$

As condições de contorno forçadas utilizadas nos problemas comuns de teoria das placas analisam os apoios simples, os engastes e as placas com bordos livres.

No primeiro caso, as equações representativas destas condições são:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (I-30A)$$

No segundo caso, temos:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \quad (I-30B)$$

E, finalmente, no terceiro caso:

$$\begin{aligned} M_n &= 0 \\ Q_n &= 0 \end{aligned} \quad (I-30C)$$

Nas expressões acima n representa a direção normal ao contorno (6) enquanto M e Q representam, respectivamente, o momento fletor e o esforço cortante.

No capítulo a seguir, estudaremos as vibrações livres de placas submetidas a distribuições uniformes de carregamentos compressivos e, mais adiante, faremos a generalização para distribuições não uniformes.

C A P Í T U L O I I

VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS UNIFORMEMENTE COMPRIMIDAS

1 - Carga uniforme em duas arestas opostas

Vamos agora nos ocupar da equação diferencial (I-28). Inicialmente, consideremos que o carregamento N_x é constante ao longo das arestas $x = 0$ e $x = a$.

A equação diferencial (I-28) pode ter suas variáveis separadas desde que façamos algumas suposições.

Inicialmente, admitamos que as vibrações são periódicas; sendo assim, podemos escrever a flecha $w(x,y,t)$ na forma

$$w(x,y,t) = W(x,y) e^{ift} \quad (II-1)$$

sendo f a frequência e $W(x,y) = X(x)Y(y)$ uma função definidora da flecha. Levando (II-1) em (I-28) obtemos, após as necessárias operações,

$$D\nabla^4 W(x,y) + q \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \rho h f^2 W = 0, \quad (II-2)$$

sendo $q = N_x$.

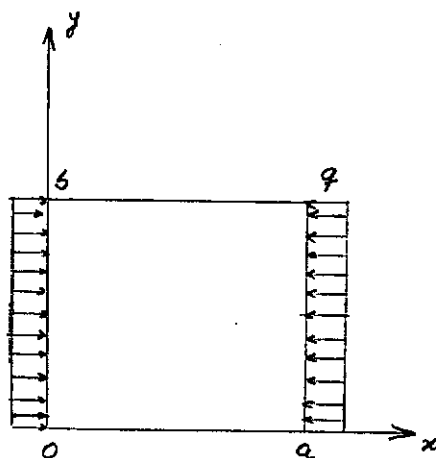
Fazendo agora

$$\frac{q}{D} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\rho h}{D} f^2 = \lambda^4 \quad (II-3)$$

a nossa equação toma o aspecto indicado por (II-4):

$$\nabla^4 W + Q \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \lambda^4 W = 0 \quad (II-4)$$

O método mais indicado para o estudo de placas retangulares em tal situação é o método de M. Levy, que admite serem duas arestas simplesmente apoiadas e que as duas outras possuam condições de contorno arbitrárias. Aqui, adotaremos as arestas $x=0$ e $x=a$ como simplesmente apoiadas (figura).



Assim, podemos dizer que a solução segundo a direção x é a série de senos

$$X(x) = \sum_n C \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = n \frac{\pi}{a} \quad (II-5)$$

Em consequência dessa última expressão, podemos notar que existe uma relação simples entre as derivadas de $X(x)$ e a própria função $X(x)$, isto é,

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x) \quad X^{IV}(x) = \alpha^4 X(x) \quad (II-6)$$

igualdades estas que conduzidas a equação diferencial (II-4) transformam-na em uma expressão separável em $X(x)$ e $Y(y)$.

Com efeito, sendo (II-4) da forma

$$X^{IV}Y + 2X''Y'' + XY^{IV} + QX''Y - \lambda^4 XY = 0 \quad (II-7)$$

se a ela aplicarmos (II-6) teremos

$$X \left[Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' - (\lambda^4 - \alpha^4 + Q\alpha^2) Y \right] = 0 \quad (II-8)$$

ou ainda

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} - (\lambda^4 - \alpha^4 + Q\alpha^2) Y = 0 \quad (II-9)$$

Esta equação, que é de coeficientes constantes, pode ser resolvida pelos métodos usuais de integração de equações homogêneas (pesquisa de raízes da equação característica). No entanto, como estes métodos envolvem operações algébricas muito extensas, o método da transformada de Laplace ou o método da transformada de Fourier tornam-se os mais viáveis.

Adotaremos o primeiro pois este já foi usado com vantagem na determinação de frequências fundamentais para as placas sem qualquer espécie de carregamento ao longo de suas arestas (?).

Aplicando a expressão da transformada de Laplace para a derivada de quarta ordem, para a derivada de segunda ordem e para a função $Y(y)$ chegamos a

$$\left[s^4 \bar{Y}(s) - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - s Y''(0) - Y'''(0) \right] - 2\alpha^2 \left[s^2 \bar{Y}(s) - s Y(0) - Y'(0) \right] - (\lambda^4 - \alpha^4 + Q\alpha^2) \bar{Y}(s) = 0 \quad (II-10)$$

onde $\bar{Y}(s) = \mathcal{L}Y(y) \quad (II-10A)$

ou ainda, exprimindo $\bar{Y}(s)$ em termos de (II-10), obtemos:

$$\bar{Y}(s) = \frac{(s^2 - 2\alpha^2) sY(0) + Y'(0) + sY''(0) + Y'''(0)}{(s^2 - \alpha^2) - (\lambda^4 + Q\alpha^2)} \quad (II-11)$$

Fazendo uma substituição de variáveis

$$\lambda^4 + Q\alpha^2 = K^4 \quad (II-11A)$$

e levando esta nova variável K, virá

$$\bar{Y}(s) = \frac{(s^2 - 2\alpha^2) sY(0) + Y'(0) + sY''(0) + Y'''(0)}{(s^2 - \alpha^2) - K^4} \quad (II-12)$$

Agora, aplicando os processos que permitem fazer uma decomposição em frações parciais, a expressão (II-12), transformar-se-á em:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(s) = & \frac{1}{2K^2} \left[\frac{1}{s^2 - j^2} - \frac{1}{s^2 + t^2} \right] [sY''(0) + Y'''(0)] + \\ & + \frac{1}{2K^2} \left[\frac{t^2}{s^2 - j^2} - \frac{j^2}{s^2 + t^2} \right] [sY(0) + Y'(0)] \end{aligned} \quad (II-13)$$

onde admitimos que

$$\begin{aligned} t^2 &= K^2 - \alpha^2 \\ j^2 &= K^2 + \alpha^2 \end{aligned} \quad (II-13A)$$

Uma vez decomposta a equação (II-11) em frações parciais — (II-13) — podemos determinar as transformadas inversas correspondentes aos diversos termos da expressão (II-13). A consulta às tabelas correntes de transformadas de Laplace (8) nos fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2 - j^2} &= \cos hjy \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2 + t^2} &= \cos ty \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 - j^2} &= \frac{1}{j} \sinh jy \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + t^2} &= \frac{1}{t} \text{senty} \end{aligned} \quad (II-14)$$

Voltando agora às expressões (II-13) e utilizando as fórmulas de transformadas inversas dadas por (II-14) chegamos a solução da equação diferencial (II-9).

Esta solução será dada por:

(II-15)

$$Y(y) = F_1(y)Y(0) + F_2(y)Y'(0) + F_3(y)Y''(0) + F_4(y)Y'''(0)$$

onde $F_1(y)$, $F_2(y)$, $F_3(y)$, $F_4(y)$ são funções de t e de j sendo dadas por:

$$F_1(y) = \frac{1}{2K^2} \left[t^2 \cosh jy + j^2 \cos ty \right]$$

$$F_2(y) = \frac{1}{2K^2} \left[\frac{t^2}{j} \sinh jy + \frac{j^2}{t} \sen ty \right] \quad (II-15A)$$

$$F_3(y) = \frac{1}{2K^2} \left[\cosh jy - \cos ty \right]$$

$$F_4(y) = \frac{1}{2K^2} \left[\frac{\sinh jy}{j} - \frac{\sen ty}{t} \right]$$

Uma vez obtida a solução da equação (II-9), podemos, dadas as condições de contorno, chegar a um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são as constantes arbitrárias que aparecem na solução da equação. A condição para que tal sistema seja possível é que o determinante dos coeficientes dessas incógnitas seja igual a zero. Isto nos leva a uma equação algébrica envolvendo os auto-valores da equação diferencial e consequentemente as frequências de vibração da placa. Tal equação será denominada de equação de frequência.

Assim, por exemplo, no caso de serem as arestas $y=0$ e $y=b$ simplesmente apoiadas, as quatro condições de contorno

$$\begin{aligned} Y(0) &= Y''(0) = 0 \\ Y(b) &= Y''(b) = 0 \end{aligned} \quad (II-16)$$

nos conduzem ao sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$Y'(0)F_2(b) + Y'''(0)F_4(b) = 0 \quad (II-17)$$

$$Y'(0)t^2j^2F_4(b) + Y'''(0)F_3(b) = 0$$

Este sistema só será possível e determinado se

$$F_2(b)F_3(b) - t^2j^2 \left[F_4(b) \right]^2 = 0 \quad (II-17A)$$

Se agora levamos em (II-17) as expressões de $F_2(y)$, $F_4(y)$ e $F'_3(y)$ com $y = b$ obteremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4K^4} \left(\frac{t^2}{j^2} \sinh^2 jb + \frac{j^2}{t^2} \sinh^2 tb + \frac{2j^2 t^2}{jt} \sinh jbsentb \right) + \\ & + \frac{2\alpha^2}{4K^4} \left(\frac{t^2}{j^2} \sinh^2 jb - \frac{t}{j} \sinh jbsentb + \frac{j}{t} sentbsenhjb - \right. \\ & \left. - \frac{j^2}{t^2} \sinh^2 tb \right) + \frac{j^2 t^2}{4K^4} \left(-\frac{\sinh^2 jb}{j^2} + \frac{2\sinh jbsentb}{jt} - \frac{\sinh^2 tb}{t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (II-18)$$

Uma vez feitas as simplificações chegamos a

$$sentb = 0 \quad (II-18A)$$

o que acarreta

$$t = m \frac{\pi}{b} \quad (II-18B)$$

ou, lembrando de (II-13A), virá:

$$K^4 = t^4 + 2\alpha^2 t^2 + \alpha^4 \quad (II-19)$$

ou ainda, substituindo na expressão acima o valor de K^4 dado pela equação (II-11A), chegaremos, finalmente, a equação que define os auto-valores da equação diferencial:

$$\lambda^4 = t^4 + (2t^2 - Q) \alpha^2 + \alpha^4 ; \quad (II-20)$$

consequentemente, os valores das frequências naturais podem ser obtidos em função da equação (II-20) desde que aí façamos a substituição de λ^4 por (II-3), isto é:

$$\frac{\rho h}{D} f_{mn}^2 = t_m^4 + (2t_m^2 - Q) \alpha_n^2 + \alpha_n^4 \quad (II-21)$$

Logo,

$$f_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sqrt{\frac{m^4 \pi^4}{b^4} + \left(\frac{2m^2 \pi^2}{b^2} - \frac{q}{D} \right) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4}} \quad (II-21A)$$

A frequência fundamental de vibrações pode ser obtida, sem qualquer dificuldade, na expressão (II-21A) fazendo aí $n=m=1$.

Assim, teremos:

$$f_{11} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \sqrt{\frac{\pi^4}{b^4} + \left(\frac{2\pi^2}{b^2} - \frac{q}{D} \right) \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^4}{a^4}} \quad (II-22)$$

Agora, podemos efetuar uma substituição de variáveis, de modo a obtermos a frequência fundamental como uma função da relação entre as duas dimensões da placa e uma de suas dimensões, (a, por exemplo).

Fazendo

$$c = \frac{a}{b} \quad (II-23)$$

teremos

$$f_{11} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{(c^2 + 1)^2 - \frac{qa^2}{\pi^2 D}} \quad (II-23A)$$

Uma das grandes vantagens do estudo dinâmico ~~está~~ no fato de poder ser feita uma particularização nas equações que dão as frequências, de modo a que resulte a carga crítica de instabilidade da placa.

Igualando a zero a expressão (II-22), isto é, admitindo que a frequência de vibrações é nula, obteremos, após a conveniente mudança de variáveis, a expressão que nos fornece a carga como função da rigidez, da relação entre as dimensões da placa e de uma de suas dimensões:

$$q = \left[\frac{D \pi^2}{n^2 a^2} (c^2 + n^2)^2 \right] \quad (II-24)$$

A carga crítica q_{crit} será igual ao menor valor obtido em (II-24) quando a n fazemos n igual ao menor inteiro positivo que seja maior ou igual a c .

2 - Cargas compressivas constantes agindo ao longo das quatro arestas da superfície média

Este caso, embora mais geral do que o tratado anteriormente, pode vir a utilizar a maior parte das expressões deste último, desde que sobre a equação diferencial sejam efetuadas as mudanças de variáveis convenientes.

A equação diferencial a ser usada é, conforme o primeiro capítulo:

$$(II-25)$$

$$D \nabla^4 w + q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \ddot{w} = 0$$

sendo

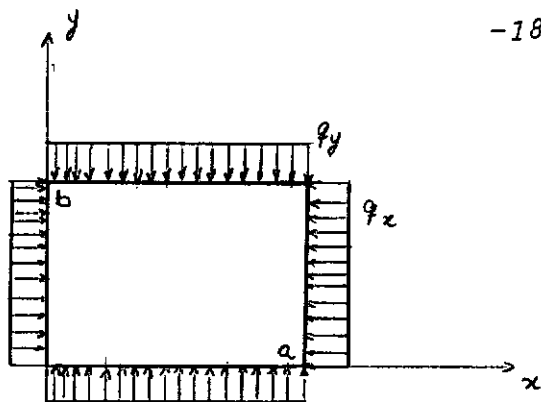
$$q_x = N_x \quad e \quad q_y = N_y \quad (II-25A)$$

fazendo

$$\frac{q_x}{D} = Q_x$$

$$\frac{q_y}{D} = Q_y \quad (\text{II-26})$$

$$\frac{\rho h}{D} \bar{f}^2 = \lambda^4,$$



admitindo que a solução da equação diferencial é periódica e substituindo (II-26) na equação que se obtém quando entramos com

$$w = W(x, y) e^{ift}, \quad (\text{II-26A})$$

resulta

$$X^{IV}Y + 2X''Y'' + Q_x X''Y + Q_y XY'' - \lambda^4 XY = 0 \quad (\text{II-27})$$

Adotando o método de M. Levy, isto é, supondo que as arestas $x = 0$ e $x = a$ são simplesmente apoiadas, podemos escrever que a função $X(x)$ tem a forma de uma série de senos, ou melhor

$$X(x) = \sum_n C_n \text{sen} \alpha_n x \quad (\text{II-28})$$

Conseqüentemente, relações entre $X(x)$ e suas derivadas podem ser deduzidas facilmente da expressão (II-28). Levando tais relações em (II-27) obtemos uma equação ordinária à coeficientes constantes do tipo:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} + (Q_y - 2\alpha^2) \frac{d^2 Y}{dy^2} - (\lambda^4 - \alpha^4 + Q_x \alpha^2) Y = 0 \quad (\text{II-29})$$

Agora, se fizermos uma nova substituição de variáveis sobre a equação (II-29) obteremos uma equação do tipo de (II-9), e a conseqüente aplicação da transformada de Laplace levar-nos-á a expressões semelhantes as obtidas no primeiro caso.

Com efeito, fazendo

$$\begin{aligned} Q_y - 2\alpha^2 &= -2k^2 \\ \lambda^4 + Q_x \alpha^2 &= \theta^4 \end{aligned} \quad (\text{II-29A})$$

e levando estas duas novas variáveis na equação (II-29) chegamos a

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} - (\theta^4 - \alpha^4) Y = 0 \quad (\text{II-30})$$

a qual, aplicadas as fórmulas usuais de transformadas de Laplace, fornece

$$\bar{Y}(s) = \frac{(s^2 - 2k^2) sY(0) + Y'(0) + sY''(0) + Y'''(0)}{(s^2 - k^2)^2 - p^4}, \quad (II-34)$$

onde

$$p^4 = \alpha^4 + \theta^4 + k^4.$$

A solução da equação diferencial é achada sem maiores dificuldades a partir da expressão (II-34); virá: (II-32)

$$Y(y) = F'_1(y)Y(0) + (F'_2(y)Y'(0) + F'_3(y)Y''(0) + F'_4(y)Y'''(0))$$

onde

$$\begin{aligned} F'_1(y) &= \frac{1}{2p^2} \left[t_1^2 \cosh j_1 y + j_1^2 \cos t_1 y \right] \\ F'_2(y) &= \frac{1}{2p^2} \left[t_1^2 \frac{\sinh j_1 y}{j_1} + j_1^2 \frac{\sin t_1 y}{t_1} \right] \\ F'_3(y) &= \frac{1}{2p^2} \left[\cosh j_1 y - \cos t_1 y \right] \\ F'_4(y) &= \frac{1}{2p^2} \left[(\sinh j_1 y) \frac{1}{j_1} - (\sin t_1 y) \frac{1}{t_1} \right] \end{aligned} \quad (II-33)$$

com

$$\begin{aligned} t_1^2 &= p^2 - k^2 \\ j_1^2 &= p^2 + k^2. \end{aligned} \quad (II-33A)$$

Se a placa é simplesmente apoiada em tôdas as quatro arestas, utilização das condições de contorno nos leva a um sistema de duas equações a duas incógnitas. A condição de possibilidade dêste sistema exige que o determinante principal seja igual a zero, o que nos conduz a equação de frequência para o caso de vibrações em estudo.

Após as simplificações algébricas o determinante se transforma em

$$\sin tb = 0; \quad (II-34)$$

logo

$$t_1 = \frac{m\pi}{b} \quad (II-34A)$$

As frequências de vibrações livres serão dadas por

$$f_{mn}^0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{(m^2 c^2 + n^2)^2 - \frac{q_x}{\pi^2 D} (r m^2 c^2 + n^2 a^2)} \quad (II-35)$$

onde

$$r = \frac{q_y}{q_x} \quad (II-35A)$$

$$c = \frac{a}{b}$$

A frequência fundamental será obtida para $m = n = 1$ em (II-35), ou melhor:

$$f_{11}^0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{(c^2 + 1)^2 - q_x \frac{(rc^2 + a^2)}{\pi^2 D}} \quad (II-36)$$

e a carga de instabilidade é determinada igualando-se (II-35) a zero:

$$(q_x)_{crit} = \frac{\min (n^2 + m^2 c^2) \pi^2 D}{b^2 c^2 (n^2 + m^2 c^2 r)} \quad (II-37)$$

C A P Í T U L O I I I

VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS DE MODO NÃO UNIFORME AO LONGO DE SUA SUPERFÍCIE MÉDIA

Consideremos uma placa submetida a cargas de compressão distribuídas não uniformemente ao longo de duas arestas opostas.

A equação diferencial que caracteriza o problema (desde que as cargas estejam segundo a direção paralela ao eixo (x)) será:

$$D\nabla^4 w + f(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \dot{w} = 0 \quad (\text{III-1})$$

onde $f(y)$ é uma função que define a forma do carregamento.

Admitindo que as vibrações são periódicas — raciocínio análogo ao do capítulo II — podemos adotar uma solução do tipo

$$w = W(x, y) e^{ift} \quad (\text{III-1A})$$

expressão esta que nos leva a equação diferencial

$$D\nabla^4 W + F(y) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \lambda^4 W = 0 \quad (\text{III-2})$$

sendo

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \frac{\rho h}{D} f^2 \\ F(y) &= \frac{f(y)}{D} \end{aligned} \quad (\text{III-2A})$$

Adotando o método de M. Levy, já indicado no capítulo anterior, chegamos a equação ordinária

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} - (F(y) \alpha^2 + \lambda^4 - \alpha^4) Y = 0 \quad (\text{III-3})$$

A esta equação, que não é de coeficientes constantes em virtude da presença de $F(y)$, poderia ser aplicada a transformada de Laplace desde que $F(y)$ fôsse uma função polinomial (caso que vamos estudar).

No entanto, o trabalho algébrico seria de tal ordem de grandeza que o método não seria o mais conveniente.

Assim, devemos optar por um método aproximado, tal como o de desenvolvimento em série de potências ou o variacional de Rayleigh-Ritz.

O primeiro destes métodos é excelente para o tratamento de equações diferenciais com coeficientes polinomiais, o que nos leva, numa primeira tentativa, a pensar em adoptá-lo. Entretanto, dois fatores o prejudicam extraordinariamente: o elevado grau da

equação e a necessidade de utilizar uma série de potências com grande número de termos, o que não é vantajoso.

O segundo é um método aproximado frequentemente utilizado em teoria das placas em virtude da sua facilidade de emprêgo em relação aos demais.

Decidimos então optar pelo método de Ritz, que no nosso caso permite utilizar uma série com pequeno número de termos.

Uma vez fixado o modo de solução do problema, devemos ainda fazer uma nova opção, pois o método de Ritz tanto pode ser aplicado à expressão da ação como à equação diferencial (III-3).

Adotando o caminho indicado pela referência (9), vamos aplicar o método de Ritz à equação (III-3).

Antes disso porém, façamos uma mudança de variáveis ($z = y/b$), de modo tal que a nossa equação se transforme em

$$\frac{d^4 Y}{dz^4} - 2\alpha^2 b^2 \frac{d^2 Y}{dz^2} - b^4 (\alpha^2 F_1(z) + \lambda^4 - \alpha^4) Y = 0 \quad (III-4)$$

Se o carregamento adotado é definido por um polinômio do segundo grau, isto é, se $F(y)$ é dado por

$$F(y) = Ay + By^2 \quad (III-5)$$

ou

$$F(z) = bAz + b^2 z^2 B \quad (III-5A)$$

a equação (III-4) passa a ser

$$\frac{d^4 Y}{dz^4} - 2\alpha^2 b^2 \frac{d^2 Y}{dz^2} - b^4 (Azba^2 + Bz^2\alpha^2 b^2 + \lambda^4 - \alpha^4) Y = 0 \quad (III-6)$$

Admitindo que a placa é simplesmente apoiada ao longo das arestas $y = 0$, $y = b$, a mudança de variáveis feita acima, nos conduz as condições de contorno

$$\begin{aligned} Y(0) &= Y''(0) = 0 \\ Y(1) &= Y''(1) = 0 \end{aligned} \quad (III-7)$$

Vamos, inicialmente, admitir que o problema pode ser resolvido em função de A e B e, uma vez determinada a equação de frequência genérica, vamos particularizá-la para diversos valores de A e de B .

Pode ser demonstrado (9) que uma equação diferencial do tipo

$$\text{onde} \quad \left[g_2(z)Y'' \right]'' - \left[g_1(z)Y' \right]' + \left[g_0(z)Y \right] = r(y) \quad (\text{III-8})$$

$$\begin{aligned} g_2(a) &\neq 0 \\ g_2(b) &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{III-8A})$$

Pode ser identificada como a condição necessária para que u ma integral

$$L(\phi) = \int_a^b (g_2 \phi''^2 + g_1 \phi'^2 + g_0 \phi^2 - 2r\phi) dz + R_A + R_B \quad (\text{III-9})$$

seja α mínima.

Os termos R_A e R_B , de (III-9) dependem basicamente das condições de contorno, e também da forma da série que é adotada para a função ϕ .

Se a série adotada não satisfaz as condições de contorno (caso de tôdas as condições serem suprimíveis), R_B pode não ser nulo. Por outro lado, quando as condições de contorno são essenciais, a série adotada para ϕ deve satisfazê-las; neste caso

$$R_A = R_B = 0$$

O nosso caso é mixto, envolvendo duas condições essenciais e duas condições suprimíveis. Assim, adotaremos uma série que satisfaça (III-7), isto é, admitiremos que ϕ é dada por

$$\phi = \sum c_n \text{sen } n\pi z \quad (\text{III-10})$$

O método de Ritz, como fornece os resultados com grande precisão e com pequeno número de termos, permite que sejam tomados apenas três termos da série. É usual entretanto, que para casos como os que estamos estudando sejam considerados um ou dois têrmos da série, pois, com tal aproximação o resultado já é excelente (6).

Assim, se

$$\phi = c_1 \text{sen} \pi z + c_2 \text{sen} 2\pi z + c_3 \text{sen} 3\pi z \quad (\text{III-11})$$

aderivação de ϕ até a segunda ordem nos fornece:

$$\phi' = c_1 \pi \cos \pi z + 2c_2 \pi \cos 2\pi z + 3c_3 \pi \cos 3\pi z \quad (\text{III-12})$$

$$\phi'' = - (c_1 \pi^2 \text{sen} \pi z + 4c_2 \pi^2 \text{sen} 2\pi z + 9c_3 \pi^2 \text{sen} 3\pi z) \quad (\text{III-13})$$

Elevando estas duas últimas expressões ao quadrado obtemos

$$\phi'^2 = c_1^2 \pi^2 \cos^2 \pi z + 4c_2^2 \pi^2 \cos^2 2\pi z + 9c_3^2 \pi^2 \cos^2 3\pi z + 4c_1 c_2 \pi^2 \cos \pi z \cos 2\pi z + 6\pi^2 c_1 c_3 \cos \pi z \cos 3\pi z + 12c_2 c_3 \pi^2 \cos 2\pi z \cos 3\pi z \quad (III-14)$$

$$\phi''^2 = c_1^2 \pi^4 \sin^2 \pi z + 16c_2^2 \pi^4 \sin^2 2\pi z + 81c_3^2 \pi^4 \sin^2 3\pi z + 8c_1 c_2 \pi^4 \sin \pi z \sin 2\pi z + 18c_1 c_3 \pi^4 \sin \pi z \sin 3\pi z + 72c_2 c_3 \pi^4 \sin 2\pi z \sin 3\pi z. \quad (III-15)$$

Com estas expressões podemos resolver a integral (III-9), de modo a obtermos a expressão de $L(\phi)$. Cada termo desta integral será resolvido separadamente:

$$\int_0^1 \phi'^2 dz = \left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{16c_2^2}{2} + \frac{81c_3^2}{2} \right) \pi^4 \quad (III-16)$$

$$\int_0^1 \phi'^2 dz = \left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{4c_2^2}{2} + \frac{9c_3^2}{2} \right) \pi^2 \quad (III-17)$$

$$\int_0^1 z \phi'^2 dz = \frac{1}{4} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - \frac{32}{9\pi^2} c_1 c_2 - \frac{96}{25\pi^2} c_2 c_3 \quad (III-18)$$

$$\int_0^1 z^2 \phi'^2 dz = c_1^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) + c_2^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2} \right) + c_3^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36\pi^2} \right) - \frac{32}{9\pi^2} c_1 c_2 - \frac{8}{48\pi^2} c_1 c_3 - \frac{96}{25\pi^2} c_2 c_3 \quad (III-19)$$

Levando tôdas as expressões acima em (III-9) obteremos

$$\begin{aligned} L(\phi) = & \frac{c_1^2}{2} \pi^4 + 8c_2^2 \pi^4 + \frac{81}{2} c_3^2 \pi^4 + \alpha^2 b^2 (c_1^2 \pi^2 + 4c_2^2 \pi^2 + 9c_3^2 \pi^2) - \\ & - \alpha^2 A b^5 \left(\frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} + \frac{c_3^2}{4} - \frac{32}{9\pi^2} c_1 c_2 - \frac{96}{25\pi^2} c_2 c_3 \right) - \\ & - B \alpha^2 b^6 \left[c_1^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) + c_2^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2} \right) + c_3^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36\pi^2} \right) - \right. \\ & - \frac{32}{9\pi^2} c_1 c_2 - \frac{1}{6\pi^2} c_1 c_3 - \left. \frac{96}{25\pi^2} c_2 c_3 \right] - \\ & - \frac{b^4 C}{2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \end{aligned} \quad (III-20)$$

Assim, obtemos uma equação

$$L_n(\phi) = L_n(c_1, c_2, c_3) \quad (III-21)$$

L_n é a aproximação de L que resulta pelo uso dos três termos, cujos coeficientes são c_1 , c_2 e c_3 . A condição de $L_n(\phi)$ ser mínimo é dada, do ponto de vista do cálculo das variações, pela condição

$$\delta L_n(\phi) = 0 \quad (III-22)$$

e esta condição, por sua vez, pode ser aproximada pelas equações

$$\frac{\partial L_n(\phi)}{\partial c_1} = \frac{\partial L_n(\phi)}{\partial c_2} = \frac{\partial L_n(\phi)}{\partial c_3} = 0 \quad (III-23)$$

Expressões estas que nos levam a um sistema de três equações a três incógnitas, cuja condição de possibilidade nos fornece um determinante envolvendo os auto-valores de nossa equação diferencial.

Então, derivando a equação (III-20) em relação a cada um dos coeficientes da série, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[(\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - 2Bb^6 \alpha^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) - \lambda^4 b^4 - \frac{1}{2} A \alpha^2 b^5 \right] c_1 + \\ & + \frac{32}{9\pi^2} (\alpha^2 b^6 B + Ab^5 \alpha^2) c_2 + \frac{1}{6\pi^2} b^6 B \alpha^2 c_3 = 0 \\ & \frac{32}{9\pi^2} (\alpha^2 b^6 B + Ab^5 \alpha^2) c_1 + \left[(4\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - \frac{1}{2} A \alpha^2 b^5 - \right. \\ & - 2Bb^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2} \right) \alpha^2 - \lambda^4 b^4 \left. \right] c_2 + \frac{96}{25\pi^2} (Ab^5 + Bb^6) \alpha^2 c_3 = 0 \\ & \frac{1}{6\pi^2} b^2 B \alpha^2 c_1 + \frac{96}{25\pi^2} \alpha^2 (Ab^5 + Bb^6) c_2 + \left[(9\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - \right. \\ & - \frac{1}{2} Ab^5 \alpha^2 - 2Bb^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36\pi^2} \right) \alpha^2 - \lambda^4 b^4 \left. \right] c_3 = 0 \end{aligned} \quad (III-24)$$

O determinante principal deste sistema nos conduz a equação de frequência com uma aproximação excelente para os casos em que só agem sobre a placa cargas compressivas. Podemos tomar mesmo um ou dois termos na nossa série que o resultado obtido não será alterado, ou se o for, a variação será tão pequena que não há necessidade de ser considerada.

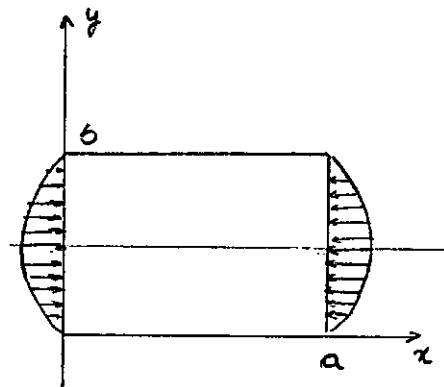
$$\begin{aligned}
 & (\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - 2Bb^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) - \lambda^4 b^4 - \frac{A\alpha^2 b^5}{2} \quad \frac{32(\alpha^2 b^6 B + \Delta b^5 \alpha^2)}{9\pi^2} \quad \frac{b^6 B \alpha^2}{6} \quad -26- \\
 & \frac{32(\alpha^2 b^6 B + \alpha^2 \Delta b^5)}{9\pi^2} \quad (4\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - \frac{\Delta b^5 \alpha^2}{2} - \frac{2Bb^6(16\pi^2 - 6)\alpha^2 - \lambda^4 b^4}{96\pi^2} \quad \frac{96\alpha^2(\Delta b^5 + Bb^6)}{25\pi^2} = 0 \\
 & \frac{b^6 B \alpha^2}{6} \quad \frac{96\alpha^2(\Delta b^5 + Bb^6)}{25\pi^2} \quad (4\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - \frac{\Delta b^5 \alpha^2}{2} - 2\alpha^2 Bb^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36\pi^2} \right) - \lambda^4 b^4
 \end{aligned}$$

2 - Aplicação ao carregamento parabólico

Se adotarmos

$$A = k/bD \quad \text{e} \quad (III-26)$$

$$B = -k/b^2 D$$



O determinante (III-25) tem os seus termos A_{12} e A_{21} anulados.

A equação de frequência neste caso, será

$$b^4 \lambda^4 = (\pi^2 + \alpha^2 b^2)^2 - 2Bb^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) \alpha^2 - Ab^5 \frac{\alpha^2}{2} \quad (III-27)$$

ou ainda

$$\lambda_{n1}^4 = \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 + \frac{2k}{D} \left(\frac{4\pi^2 - 6}{24a^2} \right) n^2 - \frac{k}{2Da^2} n^2 \pi^2 \quad (III-28)$$

Para $n = 1$, obtemos a frequência fundamental do sistema,

$$\lambda_{11}^4 = (c^2 + 1)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 1,645 \frac{k}{Da^2} \quad (III-29)$$

A carga de instabilidade pode ser facilmente determinada desde que anulamos a equação de frequência, isto é,

$$\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{a^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + \frac{2k}{D} \left(\frac{4\pi^2 - 6}{24a^2}\right) n^2 - \frac{k}{2D} n^2 \frac{\pi^2}{a^2} = 0 \quad (III-30)$$

ou ainda

$$k = \frac{D}{1,645a^2} (c^2 + n^2)^2 \pi^4 \quad (III-31)$$

Além disso, correspondendo a (III-29)

$$f_{11} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \frac{\pi^2}{a^2}} \sqrt{(c^2 + 1)^2 - 1,645k \frac{a^2}{D\pi^4}} \quad (III-32)$$

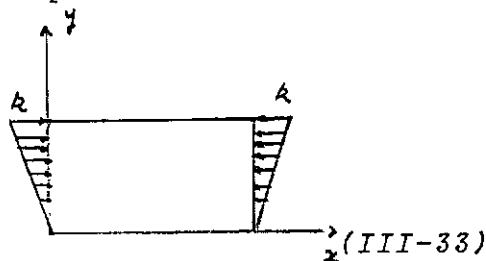
As equações (III-31) e (III-32) constituem o resultado procurado no que se refere à vibrações e instabilidade de placas submetidas a cargas de superfície média parabólicas.

3 - Carregamento com variação linear

Neste caso, fazemos

$$B = 0$$

$$A = -k/Db$$



Logo, os auto-valôres correspondentes a equação diferencial serão dados por

$$\lambda^4 = \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)^2 \pi^4 - \frac{k}{2Da^2} \quad (III-34)$$

E as frequências fundamentais em função das dimensões serão dadas por

$$f_{11} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \frac{\pi^2}{a^2}} \sqrt{(c^2 + 1)^2 - \frac{k a^2}{2D\pi^2}} \quad (III-35)$$

A carga de instabilidade pode ser determinada por processo semelhante ao anterior, isto é, fazendo λ nulo: Então

$$k = \frac{2D}{a^2} (c^2 + 1)^2 \pi^2 \quad (III-36)$$

C O N C L U S Õ E S

As tabelas que se seguem não têm em vista senão a análise qualitativa do problema.

Foram determinados diversos valores de λ^4 em função da relação entre as dimensões da placa e de uma de suas dimensões, para os vários tipos de carregamentos estudados e para o caso em que não ocorrem carregamentos de superfície média.

As tabelas foram construídas com auxílio do computador IBM 1130 e com um limite de variação de c compreendido entre 0,5 e 2,5, enquanto a variou de 2,1 a 7 e de 7,1 a 12, para uma ordenada de carga definida pela relação $k/D = 1$.

Para os casos de placas submetidas à cargas de superfície média, foi observado que a partir de um certo valor de a , os auto-valôres passam a ter sinal negativo. Tal conclusão, à primeira vista, poderia parecer um absurdo tendo em vista que os auto-valôres têm o mesmo sinal que as frequências.

Entretanto, a análise mais detalhada das expressões correspondentes às frequências naturais dos diversos casos, nos mostra que, para uma mesma relação de dimensões e para uma mesma ordenada máxima de carga, a proporção que a aumenta, λ aproxima-se de zero, ou melhor, para uma certa dimensão a carga torna-se crítica.

Além disto, foi observado que para uma mesma ordenada de carga as frequências fundamentais dependem da área de carregamento e, conseqüentemente, a placa simplesmente apoiada tem uma "dimensão de instabilidade" que varia como uma função decrescente da área de carga, quando a relação de dimensões é mantida constante.

No caso especial da relação k/D ser unitária, para o carregamento parabólico, as dimensões críticas são bem mais favoráveis, pois a ordenada máxima de carga é bem menor.

Evidentemente, as tabelas apresentadas podem ser estendidas a quaisquer outros valores de k/D , c e a , bastando para isso que seja adaptado o programa apresentado adiante.

Os problemas estudados neste trabalho poderão dar origem à análise de outros problemas, tais como a determinação de frequências para placas submetidas a carregamentos não uniformes ao longo de sua superfície média e, dotadas de orifícios; podem ser ainda feitas as particularizações das expressões deduzidas no capítulo III, para trapézios e parábolas assimétricas; podem também ser estudadas as vibrações de placas com espessura variável submetidas à cargas do tipo já citado e cuja variação de espessura é definida por uma lei linear ou parabólica.

N O M E N C L A T U R A

D	- Rigidez à flexão das placas
h	- Espessura da placa
E	- Módulo de elasticidade do material da placa
T	- Energia cinética
u,v	- Deslocamentos de um ponto segundo o plano da placa
E_c, E_t	- Componentes da energia de deformação
W, w	- Deslocamento transversal de um ponto da placa
c	- Relação entre as dimensões da placa
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	- Componentes de deformação
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	- Tensões em um ponto da placa
ν	- Coeficiente de Poisson
f, f_{mn}	- Frequência de vibração da placa
λ, λ_{mn}	- Auto-valôres da equação diferencial de vibração
N_x, N_y, N_{xy}	- Esforços externos agindo sobre a superfície média
A	- Ação
ρ	- Massa específica do material da placa

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Girkmann, Karl - *Flächentragwerke* - 1 959 - Springer-Verlag.
- 2 - Langhaar, Henry L. - *Energy Methods in Applied Mechanics* -
1 962 - Wiley and Sons, Inc.
- 3 - Weinstock, R. - *Calculus of Variations* - 1 952 - McGraw-Hill.
- 4 - Goursat, E. J. B. - *A Course in Mathematical Analysis* - 1 904
Ginn.
- 5 - Kaplan, W. - *Cálculo Avanzado* - 1 963 - Editorial Continental.
- 6 - Huffington, N. J. & Hoppmann II, W. H. - *Transverse Vibrations
of Rectangular Orthotropic Plates* - *Journal of Applied
Mechanics* - vol. 25, nº 3 - September - 1 958.
- 7 - Nowacki, W. - *Dynamics of Elastic Systems* - 1 963 - Chapman and
Hall Ltd.
- 8 - Korn, G. A. & Korn, T. M. - *Mathematical Handbook for Scientists
and Engineers* - 1 961 - McGraw-Hill
- 9 - Collatz, L. - *The Numerical Treatment of Differential Equations*
1 966 - Springer-Verlag.
- 10 - Timoshenko, S & Woinowsky-Krieger, S. - *Theory of Plates and
Shells* - 1 959 - McGraw-Hill.
- 11 - Volterra, Enrico & Zachmanoglou, E. C. - *Dynamics of Vibrations*
1 965 - Charles Merryl Books, Inc.
- 12 - Hurty, Walter C. & Rubinstein, M. F. - *Dynamics of Structures*
1 965 - Prentice-Hall

- 13 - Walker, A. C. - *Flat Rectangular Plates Subjected to a Linearly Varying Edge Compressive Loading - Thin-Walled Structures* - 1 967 - Editado por A. H. Chilver.
- 14 - Heidebrecht, Arthur C. - *Vibration of Nonuniform Simply Supported Beams* - vol. n^o 93, n^o EM2 - April 1 967
Journal of the Engineering Mechanics Division
Proceedings of the American Society of Civil Engineers.
- 15 - Andersen, B. W. - *Vibrations of Triangular Cantilever Plates by the Ritz Method* - *Journal of Applied Mechanics* Vol 21, n^o 4 - 1 954.
- 16 - Barton, M. V. - *Vibrations of Rectangular and Skew Cantilever Plates* - *Journal of Applied Mechanics* - vol 18, n^o 2 - 1 951.
- 17 - Hearmon, R. F. S. - *The Frequency of Vibrations of Rectangular Isotropic Plates* - *Journal of Applied Mechanics* - Vol 19, n^o 3 - 1 952.
- 18 - W. Chang, Yao - *Vibrations and Stability of Buckled Rectangular Plates* - *Tese de Doutorado - University of Michigan* 1 964.

VALORES DE X⁴ - CARGA UNIFORME - K/D = 1.0.

$\frac{a}{c}$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
7.1	-0.135E 00	-0.424E-01	0.209E 00	0.762E 00	0.181E 01
7.2	-0.133E 00	-0.453E-01	0.192E 00	0.715E 00	0.171E 01
7.3	-0.131E 00	-0.479E-01	0.177E 00	0.672E 00	0.161E 01
7.4	-0.129E 00	-0.502E-01	0.162E 00	0.631E 00	0.152E 01
7.5	-0.127E 00	-0.523E-01	0.149E 00	0.594E 00	0.144E 01
7.6	-0.125E 00	-0.540E-01	0.137E 00	0.559E 00	0.136E 01
7.7	-0.123E 00	-0.556E-01	0.126E 00	0.526E 00	0.129E 01
7.8	-0.121E 00	-0.569E-01	0.115E 00	0.495E 00	0.122E 01
7.9	-0.119E 00	-0.580E-01	0.106E 00	0.467E 00	0.115E 01
8.0	-0.117E 00	-0.590E-01	0.969E-01	0.440E 00	0.109E 01
8.1	-0.115E 00	-0.599E-01	0.885E-01	0.415E 00	0.103E 01
8.2	-0.113E 00	-0.605E-01	0.807E-01	0.391E 00	0.985E 00
8.3	-0.111E 00	-0.611E-01	0.735E-01	0.369E 00	0.935E 00
8.4	-0.109E 00	-0.616E-01	0.667E-01	0.349E 00	0.888E 00
8.5	-0.107E 00	-0.619E-01	0.605E-01	0.329E 00	0.844E 00
8.6	-0.105E 00	-0.622E-01	0.546E-01	0.311E 00	0.802E 00
8.7	-0.103E 00	-0.623E-01	0.492E-01	0.294E 00	0.763E 00
8.8	-0.102E 00	-0.624E-01	0.441E-01	0.278E 00	0.726E 00
8.9	-0.100E 00	-0.624E-01	0.393E-01	0.263E 00	0.691E 00
9.0	-0.986E-01	-0.624E-01	0.349E-01	0.249E 00	0.658E 00
9.1	-0.969E-01	-0.623E-01	0.308E-01	0.235E 00	0.627E 00
9.2	-0.953E-01	-0.622E-01	0.270E-01	0.223E 00	0.598E 00
9.3	-0.937E-01	-0.620E-01	0.234E-01	0.211E 00	0.570E 00
9.4	-0.921E-01	-0.617E-01	0.200E-01	0.200E 00	0.544E 00
9.5	-0.906E-01	-0.615E-01	0.169E-01	0.189E 00	0.519E 00
9.6	-0.891E-01	-0.612E-01	0.140E-01	0.179E 00	0.495E 00
9.7	-0.876E-01	-0.608E-01	0.113E-01	0.170E 00	0.473E 00
9.8	-0.862E-01	-0.605E-01	0.878E-02	0.161E 00	0.452E 00
9.9	-0.848E-01	-0.601E-01	0.641E-02	0.152E 00	0.432E 00
10.0	-0.834E-01	-0.597E-01	0.419E-02	0.144E 00	0.413E 00
10.1	-0.821E-01	-0.593E-01	0.212E-02	0.137E 00	0.395E 00
10.2	-0.807E-01	-0.588E-01	0.196E-03	0.130E 00	0.378E 00
10.3	-0.795E-01	-0.584E-01	-0.160E-02	0.123E 00	0.361E 00
10.4	-0.782E-01	-0.579E-01	-0.329E-02	0.116E 00	0.346E 00
10.5	-0.769E-01	-0.574E-01	-0.486E-02	0.110E 00	0.331E 00
10.6	-0.757E-01	-0.569E-01	-0.633E-02	0.105E 00	0.317E 00
10.7	-0.745E-01	-0.564E-01	-0.770E-02	0.995E-01	0.304E 00
10.8	-0.734E-01	-0.559E-01	-0.898E-02	0.943E-01	0.291E 00
10.9	-0.722E-01	-0.554E-01	-0.101E-01	0.894E-01	0.279E 00
11.0	-0.711E-01	-0.549E-01	-0.112E-01	0.847E-01	0.268E 00
11.1	-0.700E-01	-0.544E-01	-0.123E-01	0.803E-01	0.257E 00
11.2	-0.690E-01	-0.539E-01	-0.132E-01	0.760E-01	0.246E 00
11.3	-0.679E-01	-0.533E-01	-0.141E-01	0.720E-01	0.236E 00
11.4	-0.669E-01	-0.528E-01	-0.150E-01	0.682E-01	0.227E 00
11.5	-0.659E-01	-0.523E-01	-0.157E-01	0.646E-01	0.218E 00
11.6	-0.649E-01	-0.518E-01	-0.165E-01	0.611E-01	0.209E 00
11.7	-0.639E-01	-0.513E-01	-0.171E-01	0.578E-01	0.201E 00
11.8	-0.630E-01	-0.507E-01	-0.178E-01	0.547E-01	0.193E 00
11.9	-0.621E-01	-0.502E-01	-0.183E-01	0.517E-01	0.185E 00
12.0	-0.611E-01	-0.497E-01	-0.189E-01	0.489E-01	0.178E 00

VALORES DE λ^4 - CARGA TRIANGULAR - $F/D = 1,0$

a/c	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.1	0.670E 01	0.189E 02	0.517E 02	0.124E 03	0.262E 03
2.2	0.547E 01	0.156E 02	0.429E 02	0.102E 03	0.217E 03
2.3	0.450E 01	0.129E 02	0.358E 02	0.860E 02	0.182E 03
2.4	0.373E 01	0.108E 02	0.301E 02	0.725E 02	0.153E 03
2.5	0.310E 01	0.918E 01	0.255E 02	0.615E 02	0.130E 03
2.6	0.260E 01	0.779E 01	0.217E 02	0.525E 02	0.111E 03
2.7	0.218E 01	0.665E 01	0.186E 02	0.451E 02	0.956E 02
2.8	0.184E 01	0.570E 01	0.161E 02	0.389E 02	0.826E 02
2.9	0.156E 01	0.492E 01	0.139E 02	0.338E 02	0.718E 02
2.0	0.133E 01	0.426E 01	0.121E 02	0.295E 02	0.626E 02
3.1	0.113E 01	0.370E 01	0.106E 02	0.258E 02	0.549E 02
3.2	0.969E 00	0.323E 01	0.933E 01	0.227E 02	0.483E 02
3.3	0.830E 00	0.283E 01	0.822E 01	0.200E 02	0.427E 02
3.4	0.712E 00	0.248E 01	0.727E 01	0.177E 02	0.378E 02
3.5	0.611E 00	0.219E 01	0.645E 01	0.158E 02	0.337E 02
3.6	0.525E 00	0.193E 01	0.574E 01	0.141E 02	0.301E 02
3.7	0.451E 00	0.171E 01	0.512E 01	0.126E 02	0.269E 02
3.8	0.388E 00	0.152E 01	0.459E 01	0.113E 02	0.242E 02
3.9	0.333E 00	0.135E 01	0.412E 01	0.102E 02	0.218E 02
4.0	0.286E 00	0.121E 01	0.371E 01	0.920E 01	0.196E 02
4.1	0.245E 00	0.108E 01	0.334E 01	0.832E 01	0.178E 02
4.2	0.209E 00	0.972E 00	0.302E 01	0.754E 01	0.161E 02
4.3	0.178E 00	0.872E 00	0.274E 01	0.685E 01	0.147E 02
4.4	0.151E 00	0.784E 00	0.249E 01	0.624E 01	0.134E 02
4.5	0.127E 00	0.706E 00	0.226E 01	0.569E 01	0.122E 02
4.6	0.106E 00	0.637E 00	0.206E 01	0.520E 01	0.112E 02
4.7	0.885E-01	0.575E 00	0.188E 01	0.476E 01	0.102E 02
4.8	0.725E-01	0.519E 00	0.172E 01	0.437E 01	0.943E 01
4.9	0.585E-01	0.470E 00	0.157E 01	0.401E 01	0.867E 01
5.0	0.461E-01	0.426E 00	0.144E 01	0.369E 01	0.799E 01
5.1	0.352E-01	0.386E 00	0.133E 01	0.340E 01	0.737E 01
5.2	0.256E-01	0.350E 00	0.122E 01	0.314E 01	0.682E 01
5.3	0.172E-01	0.318E 00	0.112E 01	0.291E 01	0.631E 01
5.4	0.979E-02	0.289E 00	0.104E 01	0.269E 01	0.585E 01
5.5	0.322E-02	0.262E 00	0.961E 00	0.249E 01	0.543E 01
5.6	-0.256E-02	0.238E 00	0.888E 00	0.231E 01	0.504E 01
5.6	-0.767E-02	0.217E 00	0.822E 00	0.215E 01	0.469E 01
5.3	-0.121E-01	0.197E 00	0.762E 00	0.200E 01	0.437E 01
5.9	-0.161E-01	0.179E 00	0.707E 00	0.186E 01	0.408E 01
6.0	-0.196E-01	0.163E 00	0.656E 00	0.174E 01	0.381E 01
6.1	-0.226E-01	0.148E 00	0.610E 00	0.162E 01	0.356E 01
6.1	-0.253E-01	0.135E 00	0.567E 00	0.151E 01	0.333E 01
6.3	-0.276E-01	0.123E 00	0.528E 00	0.142E 01	0.312E 01
6.4	-0.297E-01	0.111E 00	0.492E 00	0.133E 01	0.293E 01
6.5	-0.315E-01	0.101E 00	0.459E 00	0.124E 01	0.275E 01
6.6	-0.330E-01	0.920E-01	0.428E 00	0.117E 01	0.258E 01
6.6	-0.343E-01	0.834E-01	0.400E 00	0.109E 01	0.243E 01
6.8	-0.355E-01	0.755E-01	0.374E 00	0.103E 01	0.228E 01
6.9	-0.364E-01	0.682E-01	0.350E 00	0.970E 00	0.215E 01
7.0	-0.373E-01	0.615E-01	0.327E 00	0.913E 00	0.203E 01

VALORES DE λ^4 - CARGA TRIANGULAR - $R/D = 1.0$

α	ϵ	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
7.1		-0.379E-01	0.554E-01	0.307E 00	0.860E 00	0.191E 01
7.2		-0.385E-01	0.498E-01	0.287E 00	0.811E 00	0.181E 01
7.3		-0.389E-01	0.446E-01	0.269E 00	0.764E 00	0.171E 01
7.4		-0.393E-01	0.398E-01	0.253E 00	0.722E 00	0.161E 01
7.5		-0.396E-01	0.354E-01	0.237E 00	0.681E 00	0.153E 01
7.6		-0.398E-01	0.313E-01	0.222E 00	0.644E 00	0.144E 01
7.7		-0.399E-01	0.276E-01	0.209E 00	0.609E 00	0.137E 01
7.8		-0.399E-01	0.241E-01	0.196E 00	0.576E 00	0.130E 01
7.9		-0.399E-01	0.209E-01	0.185E 00	0.546E 00	0.123E 01
8.0		-0.399E-01	0.180E-01	0.174E 00	0.517E 00	0.117E 01
8.1		-0.398E-01	0.153E-01	0.163E 00	0.490E 00	0.111E 01
8.2		-0.397E-01	0.128E-01	0.154E 00	0.465E 00	0.105E 01
8.3		-0.395E-01	0.104E-01	0.145E 00	0.441E 00	0.100E 01
8.4		-0.393E-01	0.833E-02	0.136E 00	0.419E 00	0.958E 00
8.5		-0.391E-01	0.635E-02	0.128E 00	0.398E 00	0.912E 00
8.6		-0.388E-01	0.451E-02	0.121E 00	0.378E 00	0.869E 00
8.7		-0.386E-01	0.282E-02	0.114E 00	0.359E 00	0.828E 00
8.8		-0.383E-01	0.125E-02	0.107E 00	0.342E 00	0.790E 00
8.9		-0.380E-01	-0.188E-03	0.101E 00	0.325E 00	0.753E 00
9.0		-0.377E-01	-0.152E-02	0.959E-01	0.310E 00	0.719E 00
9.1		-0.373E-01	-0.276E-02	0.904E-01	0.295E 00	0.687E 00
9.2		-0.370E-01	-0.390E-02	0.853E-01	0.281E 00	0.656E 00
9.3		-0.367E-01	-0.495E-02	0.804E-01	0.268E 00	0.627E 00
9.4		-0.363E-01	-0.593E-02	0.759E-01	0.256E 00	0.599E 00
9.5		-0.359E-01	-0.683E-02	0.716E-01	0.244E 00	0.573E 00
9.6		-0.356E-01	-0.766E-02	0.676E-01	0.233E 00	0.549E 00
9.7		-0.352E-01	-0.842E-02	0.637E-01	0.222E 00	0.525E 00
9.8		-0.348E-01	-0.913E-02	0.601E-01	0.212E 00	0.503E 00
9.9		-0.344E-01	-0.977E-02	0.567E-01	0.203E 00	0.482E 00
10.0		-0.341E-01	-0.103E-01	0.535E-01	0.194E 00	0.462E 00
10.1		-0.337E-01	-0.109E-01	0.505E-01	0.185E 00	0.443E 00
10.2		-0.333E-01	-0.114E-01	0.476E-01	0.177E 00	0.425E 00
10.3		-0.329E-01	-0.118E-01	0.449E-01	0.169E 00	0.408E 00
10.4		-0.326E-01	-0.123E-01	0.423E-01	0.162E 00	0.392E 00
10.5		-0.322E-01	-0.126E-01	0.398E-01	0.155E 00	0.376E 00
10.6		-0.318E-01	-0.130E-01	0.375E-01	0.148E 00	0.361E 00
10.7		-0.314E-01	-0.133E-01	0.353E-01	0.142E 00	0.347E 00
10.8		-0.311E-01	-0.136E-01	0.333E-01	0.136E 00	0.334E 00
10.9		-0.307E-01	-0.139E-01	0.313E-01	0.130E 00	0.321E 00
11.0		-0.303E-01	-0.141E-01	0.294E-01	0.125E 00	0.308E 00
11.1		-0.300E-01	-0.143E-01	0.277E-01	0.120E 00	0.297E 00
11.2		-0.296E-01	-0.145E-01	0.260E-01	0.115E 00	0.286E 00
11.3		-0.293E-01	-0.147E-01	0.244E-01	0.110E 00	0.275E 00
11.4		-0.289E-01	-0.148E-01	0.229E-01	0.106E 00	0.265E 00
11.5		-0.286E-01	-0.150E-01	0.215E-01	0.101E 00	0.255E 00
11.6		-0.282E-01	-0.151E-01	0.201E-01	0.978E-01	0.246E 00
11.7		-0.279E-01	-0.152E-01	0.188E-01	0.939E-01	0.237E 00
11.8		-0.275E-01	-0.153E-01	0.176E-01	0.901E-01	0.228E 00
11.9		-0.272E-01	-0.154E-01	0.164E-01	0.865E-01	0.220E 00
12.0		-0.269E-01	-0.154E-01	0.153E-01	0.831E-01	0.212E 00

VALORES DE λ^2 - CARGA PARABÓLICA - $K/D = 4.0$

a/c	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.1	0.633E 01	0.185E 02	0.514E 02	0.123E 03	0.261E 03
2.2	0.513E 01	0.152E 02	0.425E 02	0.102E 03	0.217E 03
2.3	0.419E 01	0.126E 02	0.355E 02	0.857E 02	0.181E 03
2.4	0.344E 01	0.106E 02	0.298E 02	0.722E 02	0.153E 03
2.5	0.284E 01	0.892E 01	0.252E 02	0.612E 02	0.130E 03
2.6	0.235E 01	0.755E 01	0.215E 02	0.523E 02	0.111E 03
2.7	0.196E 01	0.642E 01	0.184E 02	0.449E 02	0.954E 02
2.8	0.163E 01	0.549E 01	0.159E 02	0.387E 02	0.824E 02
2.9	0.136E 01	0.472E 01	0.137E 02	0.336E 02	0.716E 02
3.0	0.114E 01	0.407E 01	0.119E 02	0.293E 02	0.624E 02
3.1	0.963E 00	0.353E 01	0.104E 02	0.256E 02	0.547E 02
3.2	0.808E 00	0.307E 01	0.916E 01	0.225E 02	0.481E 02
3.3	0.679E 00	0.268E 01	0.807E 01	0.199E 02	0.425E 02
3.4	0.569E 00	0.234E 01	0.713E 01	0.176E 02	0.377E 02
3.5	0.477E 00	0.205E 01	0.631E 01	0.156E 02	0.335E 02
3.6	0.398E 00	0.181E 01	0.561E 01	0.139E 02	0.299E 02
3.7	0.331E 00	0.159E 01	0.500E 01	0.125E 02	0.268E 02
3.8	0.274E 00	0.141E 01	0.447E 01	0.112E 02	0.240E 02
3.9	0.225E 00	0.125E 01	0.401E 01	0.100E 02	0.216E 02
4.0	0.183E 00	0.111E 01	0.360E 01	0.910E 01	0.195E 02
4.1	0.147E 00	0.987E 00	0.324E 01	0.822E 01	0.177E 02
4.2	0.116E 00	0.879E 00	0.293E 01	0.745E 01	0.160E 02
4.3	0.893E-01	0.783E 00	0.265E 01	0.676E 01	0.146E 02
4.4	0.662E-01	0.699E 00	0.240E 01	0.615E 01	0.133E 02
4.5	0.462E-01	0.625E 00	0.218E 01	0.561E 01	0.121E 02
4.6	0.289E-01	0.559E 00	0.198E 01	0.512E 01	0.111E 02
4.7	0.140E-01	0.500E 00	0.181E 01	0.469E 01	0.101E 02
4.8	0.113E-02	0.448E 00	0.165E 01	0.430E 01	0.935E 01
4.9	-0.100E-01	0.401E 00	0.151E 01	0.395E 01	0.860E 01
5.0	-0.196E-01	0.360E 00	0.138E 01	0.363E 01	0.792E 01
5.1	-0.280E-01	0.322E 00	0.126E 01	0.334E 01	0.731E 01
5.2	-0.351E-01	0.289E 00	0.116E 01	0.308E 01	0.675E 01
5.3	-0.413E-01	0.259E 00	0.106E 01	0.285E 01	0.625E 01
5.4	-0.466E-01	0.232E 00	0.984E 00	0.263E 01	0.579E 01
5.5	-0.511E-01	0.208E 00	0.906E 00	0.244E 01	0.537E 01
5.6	-0.550E-01	0.186E 00	0.836E 00	0.226E 01	0.499E 01
5.6	-0.583E-01	0.166E 00	0.772E 00	0.210E 01	0.464E 01
5.8	-0.611E-01	0.148E 00	0.713E 00	0.195E 01	0.432E 01
5.9	-0.634E-01	0.132E 00	0.660E 00	0.182E 01	0.403E 01
6.0	-0.653E-01	0.117E 00	0.611E 00	0.169E 01	0.376E 01
6.1	-0.669E-01	0.104E 00	0.566E 00	0.158E 01	0.352E 01
6.1	-0.681E-01	0.925E-01	0.525E 00	0.147E 01	0.329E 01
6.3	-0.691E-01	0.815E-01	0.487E 00	0.138E 01	0.308E 01
6.4	-0.699E-01	0.715E-01	0.452E 00	0.129E 01	0.289E 01
6.5	-0.704E-01	0.625E-01	0.420E 00	0.120E 01	0.271E 01
6.6	-0.708E-01	0.542E-01	0.391E 00	0.113E 01	0.254E 01
6.6	-0.710E-01	0.467E-01	0.364E 00	0.106E 01	0.239E 01
6.8	-0.711E-01	0.399E-01	0.338E 00	0.996E 00	0.225E 01
6.9	-0.710E-01	0.336E-01	0.315E 00	0.936E 00	0.212E 01
7.0	-0.708E-01	0.279E-01	0.294E 00	0.879E 00	0.199E 01

VALORES DE λ^4 - CARGA PARABÓLICA - $K/D = 4.0$

λ	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
7.1	-0.706E-01	0.228E-01	0.274E 00	0.827E 00	0.188E 01
7.2	-0.702E-01	0.180E-01	0.255E 00	0.779E 00	0.177E 01
7.3	-0.698E-01	0.137E-01	0.238E 00	0.734E 00	0.167E 01
7.4	-0.694E-01	0.977E-02	0.222E 00	0.691E 00	0.158E 01
7.5	-0.688E-01	0.616E-02	0.208E 00	0.652E 00	0.150E 01
7.6	-0.682E-01	0.287E-02	0.194E 00	0.616E 00	0.142E 01
7.7	-0.676E-01	-0.138E-03	0.181E 00	0.581E 00	0.134E 01
7.8	-0.670E-01	-0.288E-02	0.169E 00	0.549E 00	0.127E 01
7.9	-0.663E-01	-0.539E-02	0.158E 00	0.519E 00	0.120E 01
8.0	-0.656E-01	-0.768E-02	0.148E 00	0.491E 00	0.114E 01
8.1	-0.649E-01	-0.977E-02	0.138E 00	0.465E 00	0.108E 01
8.2	-0.641E-01	-0.116E-01	0.129E 00	0.440E 00	0.103E 01
8.3	-0.634E-01	-0.134E-01	0.121E 00	0.417E 00	0.983E 00
8.4	-0.626E-01	-0.149E-01	0.113E 00	0.395E 00	0.935E 00
8.5	-0.619E-01	-0.164E-01	0.106E 00	0.375E 00	0.889E 00
8.6	-0.611E-01	-0.177E-01	0.991E-01	0.356E 00	0.847E 00
8.7	-0.603E-01	-0.189E-01	0.926E-01	0.338E 00	0.806E 00
8.8	-0.595E-01	-0.199E-01	0.866E-01	0.321E 00	0.768E 00
8.9	-0.588E-01	-0.209E-01	0.809E-01	0.305E 00	0.732E 00
9.0	-0.580E-01	-0.218E-01	0.755E-01	0.289E 00	0.699E 00
9.1	-0.572E-01	-0.226E-01	0.705E-01	0.275E 00	0.667E 00
9.2	-0.564E-01	-0.233E-01	0.658E-01	0.262E 00	0.636E 00
9.3	-0.557E-01	-0.239E-01	0.614E-01	0.249E 00	0.608E 00
9.4	-0.549E-01	-0.245E-01	0.573E-01	0.237E 00	0.581E 00
9.5	-0.542E-01	-0.250E-01	0.534E-01	0.226E 00	0.555E 00
9.6	-0.534E-01	-0.255E-01	0.497E-01	0.215E 00	0.531E 00
9.7	-0.527E-01	-0.259E-01	0.462E-01	0.205E 00	0.508E 00
9.8	-0.520E-01	-0.262E-01	0.430E-01	0.195E 00	0.486E 00
9.9	-0.512E-01	-0.265E-01	0.399E-01	0.186E 00	0.465E 00
10.0	-0.505E-01	-0.268E-01	0.370E-01	0.177E 00	0.446E 00
10.1	-0.498E-01	-0.270E-01	0.343E-01	0.169E 00	0.427E 00
10.2	-0.491E-01	-0.272E-01	0.318E-01	0.161E 00	0.409E 00
10.3	-0.484E-01	-0.274E-01	0.293E-01	0.154E 00	0.392E 00
10.4	-0.478E-01	-0.275E-01	0.271E-01	0.147E 00	0.376E 00
10.5	-0.471E-01	-0.276E-01	0.249E-01	0.140E 00	0.361E 00
10.6	-0.465E-01	-0.276E-01	0.229E-01	0.134E 00	0.346E 00
10.7	-0.458E-01	-0.277E-01	0.210E-01	0.128E 00	0.333E 00
10.8	-0.452E-01	-0.277E-01	0.192E-01	0.122E 00	0.319E 00
10.9	-0.446E-01	-0.277E-01	0.175E-01	0.117E 00	0.307E 00
11.0	-0.439E-01	-0.277E-01	0.158E-01	0.111E 00	0.295E 00
11.1	-0.433E-01	-0.277E-01	0.143E-01	0.107E 00	0.283E 00
11.2	-0.427E-01	-0.276E-01	0.129E-01	0.102E 00	0.272E 00
11.3	-0.421E-01	-0.276E-01	0.115E-01	0.978E-01	0.262E 00
11.4	-0.416E-01	-0.275E-01	0.102E-01	0.935E-01	0.252E 00
11.5	-0.410E-01	-0.274E-01	0.907E-02	0.894E-01	0.242E 00
11.6	-0.404E-01	-0.273E-01	0.792E-02	0.855E-01	0.233E 00
11.7	-0.399E-01	-0.272E-01	0.683E-02	0.818E-01	0.225E 00
11.8	-0.394E-01	-0.271E-01	0.581E-02	0.783E-01	0.216E 00
11.9	-0.388E-01	-0.270E-01	0.484E-02	0.749E-01	0.208E 00
12.0	-0.383E-01	-0.269E-01	0.392E-02	0.717E-01	0.201E 00

VALORES DE λ - CARGA PARABOLICA - $K/D = 1,0$

a/c	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.1	0.745E 01	0.196E 02	0.525E 02	0.124E 03	0.262E 03
2.2	0.615E 01	0.162E 02	0.435E 02	0.103E 03	0.218E 03
2.3	0.512E 01	0.136E 02	0.364E 02	0.867E 02	0.182E 03
2.4	0.430E 01	0.114E 02	0.307E 02	0.731E 02	0.154E 03
2.5	0.363E 01	0.971E 01	0.260E 02	0.620E 02	0.130E 03
2.6	0.308E 01	0.828E 01	0.222E 02	0.530E 02	0.111E 03
2.7	0.263E 01	0.710E 01	0.191E 02	0.455E 02	0.961E 02
2.8	0.226E 01	0.612E 01	0.165E 02	0.394E 02	0.830E 02
2.9	0.195E 01	0.531E 01	0.143E 02	0.342E 02	0.721E 02
3.0	0.169E 01	0.462E 01	0.125E 02	0.298E 02	0.630E 02
3.1	0.147E 01	0.404E 01	0.109E 02	0.261E 02	0.552E 02
3.2	0.129E 01	0.355E 01	0.965E 01	0.230E 02	0.486E 02
3.3	0.113E 01	0.313E 01	0.852E 01	0.203E 02	0.430E 02
3.4	0.996E 00	0.277E 01	0.755E 01	0.180E 02	0.381E 02
3.5	0.879E 00	0.246E 01	0.672E 01	0.160E 02	0.339E 02
3.6	0.779E 00	0.219E 01	0.599E 01	0.143E 02	0.303E 02
3.7	0.691E 00	0.195E 01	0.536E 01	0.128E 02	0.271E 02
3.8	0.616E 00	0.175E 01	0.482E 01	0.115E 02	0.244E 02
3.9	0.549E 00	0.157E 01	0.433E 01	0.104E 02	0.220E 02
4.0	0.491E 00	0.141E 01	0.391E 01	0.940E 01	0.198E 02
4.1	0.440E 00	0.128E 01	0.354E 01	0.852E 01	0.180E 02
4.2	0.395E 00	0.115E 01	0.321E 01	0.773E 01	0.163E 02
4.3	0.356E 00	0.105E 01	0.292E 01	0.703E 01	0.148E 02
4.4	0.321E 00	0.954E 00	0.266E 01	0.641E 01	0.135E 02
4.5	0.289E 00	0.868E 00	0.242E 01	0.585E 01	0.124E 02
4.6	0.262E 00	0.792E 00	0.222E 01	0.536E 01	0.113E 02
4.7	0.237E 00	0.724E 00	0.203E 01	0.491E 01	0.104E 02
4.8	0.215E 00	0.662E 00	0.186E 01	0.451E 01	0.957E 01
4.9	0.195E 00	0.607E 00	0.171E 01	0.415E 01	0.881E 01
5.0	0.177E 00	0.557E 00	0.158E 01	0.383E 01	0.812E 01
5.1	0.161E 00	0.512E 00	0.145E 01	0.353E 01	0.750E 01
5.2	0.147E 00	0.472E 00	0.134E 01	0.326E 01	0.694E 01
5.3	0.134E 00	0.435E 00	0.124E 01	0.302E 01	0.643E 01
5.4	0.122E 00	0.401E 00	0.115E 01	0.280E 01	0.596E 01
5.5	0.111E 00	0.371E 00	0.107E 01	0.260E 01	0.554E 01
5.6	0.102E 00	0.343E 00	0.993E 00	0.242E 01	0.515E 01
5.6	0.935E-01	0.318E 00	0.924E 00	0.225E 01	0.479E 01
5.8	0.855E-01	0.295E 00	0.860E 00	0.210E 01	0.447E 01
5.9	0.783E-01	0.274E 00	0.801E 00	0.196E 01	0.417E 01
6.0	0.717E-01	0.254E 00	0.748E 00	0.183E 01	0.390E 01
6.1	0.657E-01	0.237E 00	0.698E 00	0.171E 01	0.365E 01
6.1	0.602E-01	0.220E 00	0.653E 00	0.160E 01	0.342E 01
6.3	0.551E-01	0.205E 00	0.611E 00	0.150E 01	0.320E 01
6.4	0.503E-01	0.192E 00	0.573E 00	0.141E 01	0.301E 01
6.5	0.463E-01	0.179E 00	0.537E 00	0.132E 01	0.282E 01
6.6	0.424E-01	0.167E 00	0.504E 00	0.124E 01	0.266E 01
6.6	0.388E-01	0.156E 00	0.473E 00	0.117E 01	0.250E 01
6.8	0.356E-01	0.146E 00	0.445E 00	0.110E 01	0.235E 01
6.9	0.325E-01	0.137E 00	0.419E 00	0.103E 01	0.222E 01
7.0	0.298E-01	0.128E 00	0.394E 00	0.980E 00	0.209E 01

VALORES DE λ^4 - CARGA PARABÓLICA - $K/D = 1.0$

α	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
7.1	0.272E-01	0.120E 00	0.372E 00	0.925E 00	0.198E 01
7.2	0.249E-01	0.113E 00	0.351E 00	0.874E 00	0.187E 01
7.3	0.227E-01	0.106E 00	0.331E 00	0.826E 00	0.177E 01
7.4	0.207E-01	0.998E-01	0.313E 00	0.782E 00	0.167E 01
7.5	0.188E-01	0.939E-01	0.295E 00	0.740E 00	0.158E 01
7.6	0.171E-01	0.883E-01	0.279E 00	0.701E 00	0.150E 01
7.7	0.155E-01	0.830E-01	0.264E 00	0.665E 00	0.142E 01
7.8	0.140E-01	0.782E-01	0.250E 00	0.630E 00	0.135E 01
7.9	0.127E-01	0.736E-01	0.237E 00	0.598E 00	0.128E 01
8.0	0.114E-01	0.694E-01	0.225E 00	0.568E 00	0.122E 01
8.1	0.102E-01	0.654E-01	0.213E 00	0.540E 00	0.116E 01
8.2	0.919E-02	0.617E-01	0.203E 00	0.514E 00	0.110E 01
8.3	0.819E-02	0.582E-01	0.192E 00	0.489E 00	0.105E 01
8.4	0.725E-02	0.549E-01	0.183E 00	0.465E 00	0.100E 01
8.5	0.638E-02	0.518E-01	0.174E 00	0.443E 00	0.958E 00
8.6	0.558E-02	0.489E-01	0.165E 00	0.422E 00	0.913E 00
8.7	0.483E-02	0.462E-01	0.157E 00	0.403E 00	0.871E 00
8.8	0.413E-02	0.437E-01	0.150E 00	0.384E 00	0.832E 00
8.9	0.349E-02	0.413E-01	0.143E 00	0.367E 00	0.795E 00
9.0	0.288E-02	0.390E-01	0.136E 00	0.350E 00	0.760E 00
9.1	0.233E-02	0.369E-01	0.130E 00	0.335E 00	0.726E 00
9.2	0.181E-02	0.349E-01	0.124E 00	0.320E 00	0.695E 00
9.3	0.132E-02	0.330E-01	0.118E 00	0.306E 00	0.665E 00
9.4	0.877E-03	0.312E-01	0.113E 00	0.293E 00	0.637E 00
9.5	0.459E-03	0.296E-01	0.108E 00	0.280E 00	0.610E 00
9.6	0.706E-04	0.280E-01	0.103E 00	0.268E 00	0.584E 00
9.7	-0.290E-03	0.265E-01	0.987E-01	0.257E 00	0.560E 00
9.8	-0.626E-03	0.251E-01	0.944E-01	0.246E 00	0.537E 00
9.9	-0.939E-03	0.237E-01	0.903E-01	0.236E 00	0.516E 00
10.0	-0.122E-02	0.225E-01	0.864E-01	0.227E 00	0.495E 00
10.1	-0.149E-02	0.213E-01	0.827E-01	0.217E 00	0.475E 00
10.2	-0.175E-02	0.201E-01	0.792E-01	0.209E 00	0.457E 00
10.3	-0.198E-02	0.191E-01	0.759E-01	0.200E 00	0.439E 00
10.4	-0.219E-02	0.180E-01	0.727E-01	0.192E 00	0.422E 00
10.5	-0.239E-02	0.171E-01	0.697E-01	0.185E 00	0.406E 00
10.6	-0.258E-02	0.162E-01	0.668E-01	0.178E 00	0.390E 00
10.7	-0.275E-02	0.153E-01	0.641E-01	0.171E 00	0.376E 00
10.8	-0.291E-02	0.145E-01	0.615E-01	0.164E 00	0.362E 00
10.9	-0.306E-02	0.137E-01	0.590E-01	0.158E 00	0.348E 00
11.0	-0.319E-02	0.130E-01	0.566E-01	0.152E 00	0.336E 00
11.1	-0.332E-02	0.123E-01	0.544E-01	0.147E 00	0.323E 00
11.2	-0.344E-02	0.116E-01	0.522E-01	0.141E 00	0.312E 00
11.3	-0.354E-02	0.110E-01	0.502E-01	0.136E 00	0.301E 00
11.4	-0.364E-02	0.104E-01	0.482E-01	0.131E 00	0.290E 00
11.5	-0.373E-02	0.983E-02	0.463E-01	0.126E 00	0.280E 00
11.6	-0.381E-02	0.929E-02	0.445E-01	0.122E 00	0.270E 00
11.7	-0.389E-02	0.877E-02	0.428E-01	0.117E 00	0.261E 00
11.8	-0.396E-02	0.828E-02	0.412E-01	0.113E 00	0.252E 00
11.9	-0.402E-02	0.781E-02	0.396E-01	0.109E 00	0.243E 00
12.0	-0.408E-02	0.736E-02	0.381E-01	0.106E 00	0.235E 00

VALORES DE λ^4 . PLACA SEM CARGA DE SUPERFÍCIE MÉDIA

a/c	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.1	0.782E 01	0.200E 02	0.529E 02	0.125E 03	0.263E 03
2.2	0.649E 01	0.166E 02	0.439E 02	0.103E 03	0.218E 03
2.3	0.543E 01	0.139E 02	0.367E 02	0.870E 02	0.182E 03
2.4	0.458E 01	0.117E 02	0.310E 02	0.734E 02	0.154E 03
2.5	0.389E 01	0.997E 01	0.263E 02	0.623E 02	0.131E 03
2.6	0.333E 01	0.852E 01	0.225E 02	0.532E 02	0.112E 03
2.7	0.286E 01	0.733E 01	0.193E 02	0.458E 02	0.963E 02
2.8	0.247E 01	0.633E 01	0.167E 02	0.396E 02	0.833E 02
2.9	0.215E 01	0.550E 01	0.145E 02	0.344E 02	0.723E 02
3.0	0.187E 01	0.481E 01	0.127E 02	0.300E 02	0.632E 02
3.1	0.164E 01	0.421E 01	0.111E 02	0.263E 02	0.554E 02
3.2	0.145E 01	0.371E 01	0.981E 01	0.232E 02	0.488E 02
3.3	0.128E 01	0.328E 01	0.867E 01	0.205E 02	0.431E 02
3.4	0.113E 01	0.291E 01	0.769E 01	0.182E 02	0.383E 02
3.5	0.101E 01	0.259E 01	0.685E 01	0.162E 02	0.341E 02
3.6	0.906E 00	0.231E 01	0.612E 01	0.144E 02	0.304E 02
3.7	0.812E 00	0.207E 01	0.548E 01	0.129E 02	0.273E 02
3.8	0.729E 00	0.186E 01	0.493E 01	0.116E 02	0.245E 02
3.9	0.657E 00	0.168E 01	0.444E 01	0.105E 02	0.221E 02
4.0	0.594E 00	0.152E 01	0.401E 01	0.951E 01	0.200E 02
4.1	0.538E 00	0.137E 01	0.364E 01	0.861E 01	0.181E 02
4.2	0.489E 00	0.125E 01	0.330E 01	0.782E 01	0.164E 02
4.3	0.445E 00	0.113E 01	0.300E 01	0.712E 01	0.149E 02
4.4	0.406E 00	0.103E 01	0.274E 01	0.649E 01	0.136E 02
4.5	0.371E 00	0.950E 00	0.250E 01	0.593E 01	0.124E 02
4.6	0.339E 00	0.870E 00	0.229E 01	0.543E 01	0.114E 02
4.7	0.311E 00	0.798E 00	0.210E 01	0.499E 01	0.104E 02
4.8	0.286E 00	0.734E 00	0.193E 01	0.458E 01	0.964E 01
4.9	0.264E 00	0.675E 00	0.178E 01	0.422E 01	0.888E 01
5.0	0.243E 00	0.623E 00	0.164E 01	0.389E 01	0.819E 01
5.1	0.224E 00	0.575E 00	0.152E 01	0.359E 01	0.756E 01
5.2	0.208E 00	0.532E 00	0.140E 01	0.333E 01	0.700E 01
5.3	0.192E 00	0.493E 00	0.130E 01	0.308E 01	0.648E 01
5.4	0.178E 00	0.458E 00	0.121E 01	0.286E 01	0.602E 01
5.5	0.166E 00	0.425E 00	0.112E 01	0.266E 01	0.559E 01
5.6	0.154E 00	0.396E 00	0.104E 01	0.247E 01	0.520E 01
5.6	0.144E 00	0.369E 00	0.974E 00	0.230E 01	0.485E 01
5.8	0.134E 00	0.344E 00	0.909E 00	0.215E 01	0.452E 01
5.9	0.125E 00	0.321E 00	0.849E 00	0.200E 01	0.422E 01
6.0	0.117E 00	0.300E 00	0.793E 00	0.187E 01	0.395E 01
6.1	0.109E 00	0.281E 00	0.743E 00	0.175E 01	0.369E 01
6.1	0.103E 00	0.263E 00	0.696E 00	0.164E 01	0.346E 01
6.3	0.966E-01	0.247E 00	0.653E 00	0.154E 01	0.325E 01
6.4	0.907E-01	0.232E 00	0.613E 00	0.145E 01	0.305E 01
6.5	0.852E-01	0.218E 00	0.576E 00	0.136E 01	0.286E 01
6.6	0.802E-01	0.205E 00	0.542E 00	0.128E 01	0.269E 01
6.6	0.755E-01	0.193E 00	0.510E 00	0.120E 01	0.254E 01
6.8	0.711E-01	0.182E 00	0.481E 00	0.113E 01	0.239E 01
6.9	0.671E-01	0.171E 00	0.453E 00	0.107E 01	0.225E 01
7.0	0.633E-01	0.162E 00	0.428E 00	0.101E 01	0.213E 01

VALORES DE λ^4 - PLACA SEM CARRO DE SUPERFÍCIE MÉDIA.

$a \backslash c$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
7.1	0.598E-01	0.153E 00	0.404E 00	0.958E 00	0.201E 01
7.2	0.566E-01	0.144E 00	0.382E 00	0.906E 00	0.190E 01
7.3	0.535E-01	0.137E 00	0.362E 00	0.857E 00	0.180E 01
7.4	0.507E-01	0.129E 00	0.343E 00	0.812E 00	0.170E 01
7.5	0.481E-01	0.123E 00	0.325E 00	0.769E 00	0.161E 01
7.6	0.456E-01	0.116E 00	0.308E 00	0.729E 00	0.153E 01
7.7	0.432E-01	0.110E 00	0.292E 00	0.692E 00	0.145E 01
7.8	0.411E-01	0.105E 00	0.277E 00	0.657E 00	0.138E 01
7.9	0.390E-01	0.100E 00	0.264E 00	0.625E 00	0.131E 01
8.0	0.371E-01	0.951E-01	0.251E 00	0.594E 00	0.125E 01
8.1	0.353E-01	0.905E-01	0.239E 00	0.565E 00	0.118E 01
8.2	0.336E-01	0.861E-01	0.227E 00	0.538E 00	0.113E 01
8.3	0.320E-01	0.821E-01	0.216E 00	0.513E 00	0.107E 01
8.4	0.305E-01	0.782E-01	0.206E 00	0.489E 00	0.102E 01
8.5	0.291E-01	0.746E-01	0.197E 00	0.466E 00	0.980E 00
8.6	0.278E-01	0.712E-01	0.188E 00	0.445E 00	0.936E 00
8.7	0.265E-01	0.680E-01	0.179E 00	0.425E 00	0.893E 00
8.8	0.253E-01	0.649E-01	0.171E 00	0.406E 00	0.853E 00
8.9	0.242E-01	0.621E-01	0.163E 00	0.388E 00	0.816E 00
9.0	0.231E-01	0.593E-01	0.156E 00	0.371E 00	0.780E 00
9.1	0.221E-01	0.568E-01	0.150E 00	0.355E 00	0.746E 00
9.2	0.212E-01	0.543E-01	0.143E 00	0.339E 00	0.714E 00
9.3	0.203E-01	0.520E-01	0.137E 00	0.325E 00	0.684E 00
9.4	0.194E-01	0.499E-01	0.131E 00	0.311E 00	0.655E 00
9.5	0.186E-01	0.478E-01	0.126E 00	0.298E 00	0.628E 00
9.6	0.179E-01	0.458E-01	0.121E 00	0.286E 00	0.602E 00
9.7	0.171E-01	0.440E-01	0.116E 00	0.275E 00	0.578E 00
9.8	0.165E-01	0.422E-01	0.111E 00	0.264E 00	0.555E 00
9.9	0.158E-01	0.405E-01	0.107E 00	0.253E 00	0.533E 00
10.0	0.152E-01	0.389E-01	0.102E 00	0.243E 00	0.512E 00
10.1	0.146E-01	0.374E-01	0.988E-01	0.234E 00	0.492E 00
10.2	0.140E-01	0.359E-01	0.950E-01	0.224E 00	0.473E 00
10.3	0.135E-01	0.346E-01	0.914E-01	0.216E 00	0.454E 00
10.4	0.130E-01	0.333E-01	0.879E-01	0.208E 00	0.437E 00
10.5	0.125E-01	0.320E-01	0.846E-01	0.200E 00	0.421E 00
10.6	0.120E-01	0.308E-01	0.814E-01	0.192E 00	0.405E 00
10.7	0.116E-01	0.297E-01	0.784E-01	0.185E 00	0.390E 00
10.8	0.111E-01	0.286E-01	0.756E-01	0.178E 00	0.376E 00
10.9	0.107E-01	0.276E-01	0.728E-01	0.172E 00	0.362E 00
11.0	0.103E-01	0.266E-01	0.702E-01	0.166E 00	0.349E 00
11.1	0.100E-01	0.256E-01	0.677E-01	0.160E 00	0.337E 00
11.2	0.967E-02	0.247E-01	0.653E-01	0.154E 00	0.325E 00
11.3	0.933E-02	0.238E-01	0.631E-01	0.149E 00	0.314E 00
11.4	0.901E-02	0.230E-01	0.609E-01	0.144E 00	0.303E 00
11.5	0.870E-02	0.222E-01	0.588E-01	0.139E 00	0.292E 00
11.6	0.840E-02	0.215E-01	0.568E-01	0.134E 00	0.282E 00
11.7	0.812E-02	0.207E-01	0.549E-01	0.129E 00	0.273E 00
11.8	0.785E-02	0.200E-01	0.530E-01	0.125E 00	0.264E 00
11.9	0.758E-02	0.194E-01	0.513E-01	0.121E 00	0.255E 00
12.0	0.734E-02	0.187E-01	0.496E-01	0.117E 00	0.246E 00

VALORES DE λ^4 - CARGA UNIFORME - $K/D = 1.0$

α / β	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
2.1	0.558E 01	0.177E 02	0.506E 02	0.122E 03	0.261E 03
2.2	0.445E 01	0.145E 02	0.418E 02	0.101E 03	0.216E 03
2.3	0.357E 01	0.120E 02	0.349E 02	0.851E 02	0.181E 03
2.4	0.287E 01	0.100E 02	0.292E 02	0.716E 02	0.152E 03
2.5	0.231E 01	0.839E 01	0.247E 02	0.607E 02	0.129E 03
2.6	0.187E 01	0.706E 01	0.210E 02	0.518E 02	0.110E 03
2.7	0.151E 01	0.597E 01	0.180E 02	0.444E 02	0.949E 02
2.8	0.121E 01	0.508E 01	0.154E 02	0.383E 02	0.820E 02
2.9	0.978E 00	0.433E 01	0.133E 02	0.332E 02	0.712E 02
3.0	0.782E 00	0.371E 01	0.116E 02	0.289E 02	0.621E 02
3.1	0.621E 00	0.319E 01	0.101E 02	0.253E 02	0.544E 02
3.2	0.487E 00	0.275E 01	0.884E 01	0.222E 02	0.478E 02
3.3	0.377E 00	0.237E 01	0.776E 01	0.196E 02	0.422E 02
3.4	0.285E 00	0.206E 01	0.684E 01	0.173E 02	0.374E 02
3.5	0.208E 00	0.179E 01	0.605E 01	0.154E 02	0.333E 02
3.6	0.144E 00	0.155E 01	0.536E 01	0.137E 02	0.297E 02
3.7	0.912E-01	0.135E 01	0.476E 01	0.122E 02	0.265E 02
3.8	0.464E-01	0.118E 01	0.425E 01	0.109E 02	0.238E 02
3.9	0.905E-02	0.103E 01	0.379E 01	0.987E 01	0.214E 02
4.0	-0.222E-01	0.905E 00	0.340E 01	0.889E 01	0.193E 02
4.1	-0.484E-01	0.791E 00	0.305E 01	0.803E 01	0.175E 02
4.2	-0.703E-01	0.692E 00	0.274E 01	0.726E 01	0.158E 02
4.3	-0.885E-01	0.605E 00	0.247E 01	0.658E 01	0.144E 02
4.4	-0.103E 00	0.529E 00	0.223E 01	0.598E 01	0.131E 02
4.5	-0.116E 00	0.462E 00	0.202E 01	0.545E 01	0.119E 02
4.6	-0.126E 00	0.403E 00	0.183E 01	0.497E 01	0.109E 02
4.7	-0.134E 00	0.351E 00	0.166E 01	0.454E 01	0.100E 02
4.8	-0.141E 00	0.305E 00	0.150E 01	0.415E 01	0.921E 01
4.9	-0.147E 00	0.264E 00	0.137E 01	0.381E 01	0.847E 01
5.0	-0.151E 00	0.228E 00	0.125E 01	0.350E 01	0.779E 01
5.1	-0.154E 00	0.196E 00	0.114E 01	0.322E 01	0.718E 01
5.2	-0.156E 00	0.167E 00	0.104E 01	0.296E 01	0.663E 01
5.3	-0.158E 00	0.142E 00	0.952E 00	0.273E 01	0.613E 01
5.4	-0.159E 00	0.119E 00	0.871E 00	0.252E 01	0.568E 01
5.5	-0.159E 00	0.995E-01	0.798E 00	0.233E 01	0.526E 01
5.6	-0.159E 00	0.814E-01	0.731E 00	0.216E 01	0.489E 01
5.6	-0.159E 00	0.653E-01	0.670E 00	0.200E 01	0.454E 01
5.8	-0.158E 00	0.509E-01	0.615E 00	0.185E 01	0.423E 01
5.9	-0.157E 00	0.380E-01	0.565E 00	0.172E 01	0.394E 01
6.0	-0.156E 00	0.265E-01	0.519E 00	0.160E 01	0.367E 01
6.1	-0.155E 00	0.161E-01	0.477E 00	0.149E 01	0.343E 01
6.1	-0.153E 00	0.695E-02	0.439E 00	0.139E 01	0.320E 01
6.3	-0.152E 00	-0.130E-02	0.404E 00	0.129E 01	0.300E 01
6.4	-0.150E 00	-0.869E-02	0.372E 00	0.121E 01	0.281E 01
6.5	-0.148E 00	-0.153E-01	0.342E 00	0.113E 01	0.263E 01
6.6	-0.146E 00	-0.212E-01	0.315E 00	0.105E 01	0.247E 01
6.6	-0.144E 00	-0.264E-01	0.290E 00	0.988E 00	0.232E 01
6.8	-0.142E 00	-0.311E-01	0.267E 00	0.925E 00	0.218E 01
6.9	-0.140E 00	-0.353E-01	0.246E 00	0.867E 00	0.205E 01
7.0	-0.138E 00	-0.391E-01	0.227E 00	0.812E 00	0.193E 01

